

1. 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① -2 는 -16 의 네제곱근이다.
- ② 4 는 16 의 세제곱근이다.
- ③ 8 의 세제곱근은 2 뿐이다.
- ④ 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 이다.
- ⑤ -4 는 -64 의 세제곱근이다.

해설

① $(-2)^4 = 16 \neq -16$ 이므로 -2 는 -16 의 네제곱근이 아니다.

② $4^3 = 64 \neq 16$ 이므로 4 는 16 의 세제곱근이 아니다.

③ 8 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 8$ 이므로

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

따라서, 8 의 세제곱근은 2 외에도 $-1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$ 가 있다.

④ 81 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로

$$x^4 - 81 = 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$

$$(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 3 \text{ 또는 } x = \pm 3i$$

따라서, 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 외에도 $3i, -3i$ 가 있다.

⑤ $(-4)^3 = -64$ 이므로 -4 는 -64 의 세제곱근이다.

2. $\sqrt{10 \cdot \sqrt[3]{10}} \div 5^{\frac{2}{3}}$ 의 값은?

① $\sqrt[3]{2}$

② $\sqrt[3]{4}$

③ $\sqrt[3]{5}$

④ $\sqrt[3]{10}$

⑤ $\sqrt[3]{20}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= (10 \cdot 10^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{2}{3}} \div 5^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

3. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$ 을 2^k 꼴로 나타낼 때 k 는?

① $\frac{11}{12}$

② $\frac{11}{24}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{23}{24}$

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}& \sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}} \\&= \left\{ 2 \times \left(4 \times 8^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\&= \left\{ 2 \times \left(2^2 \times 2^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\&= \left\{ 2 \times \left(2^{\frac{11}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\&= \left(2 \times 2^{\frac{11}{12}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{23}{12}} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{23}{24}} \\&\therefore k = \frac{23}{24}\end{aligned}$$

4. $\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② 1

③ $\sqrt{5}$

④ 5

⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned} \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} &= \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (25)^{\frac{1}{2}} = 5 \end{aligned}$$

5. 다음 식을 간단히 하면?

$$20^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}}$$

① $2\sqrt{2}$

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 5

⑤ $\sqrt{20}$

해설

$$20^{\frac{2}{3}} = (4 \times 5)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \text{ 이므로}$$

$$20^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}} = (4^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}) \times 4^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}}$$

$$= (4^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{2}{3}}) \times (5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}})$$

$$= 4^{\frac{2}{3} + (-\frac{2}{3})} \times (5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}})$$

$$= 4^{\frac{2}{3} + (-\frac{2}{3})} \times 5^{\frac{2}{3} + (-\frac{1}{6})}$$

$$= 4^0 \times 5^{\frac{1}{2}} = 1 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

6. $\log_8 0.25 = x$ 를 만족하는 x 의 값은?

① 1

② $-\frac{1}{3}$

③ $-\frac{2}{3}$

④ $-\frac{1}{4}$

⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

$$\log_8 0.25 = x \text{에서 } 8^x = 0.25$$

$$(2^3)^x = \frac{1}{4} \quad \therefore 2^{3x} = 2^{-2}$$

$$\therefore 3x = -2$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3}$$

7. $\log_3(x - 6)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x > 3$

② $x < 3$

③ $x < 6$

④ $x > 6$

⑤ $x \geq 6$

해설

$$x - 6 > 0 \text{로부터 } x > 6$$

8. $\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{2}$ 의 값을 구하면?

① 0

② -1

③ 1

④ -2

⑤ 2

해설

로그의 성질에 의하여
 $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{2} &= \log_2 \left(6 \div \frac{3}{2} \right) \\ &= \log_2 \left(6 \times \frac{2}{3} \right) = 2\end{aligned}$$

9. $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ 이고 $\log_{a^3b} ab^3 = 9$ 일 때, $\log_a b$ 의 값은?

① $\frac{13}{3}$

② $\frac{14}{3}$

③ -3

④ 3

⑤ 5

해설

$$\log_{a^3b} ab^3 = \frac{\log ab^3}{\log a^3b} = \frac{\log a + 3\log b}{3\log a + \log b} = 9 \text{ 에서}$$

$$\log a + 3\log b = 27\log a + 9\log b$$

$$-26\log a = 6\log b$$

$$-\frac{26}{6} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\therefore \log_a b = -\frac{13}{3}$$

10. $(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② -1

③ 0

④ $\log_3 2$

⑤ $\log_2 3$

해설

$$\begin{aligned} & (\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75 \\ &= (\log_3 2)(\log_2 5) - \log_9 75 \\ &= \log_3 5 - \frac{1}{2} \log_3 75 \\ &= \log_3 \frac{5}{5\sqrt{3}} \\ &= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

11. $3^{2\log_3 4 - 3\log_3 2}$ 을 간단히 하면?

① $\log_3 2$

② 1

③ $2\log_3 2$

④ $\log_2 3$

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} 3^{2\log_3 4 - 3\log_3 2} &= 3^{\log_3 16 - \log_3 8} \\ &= 3^{\log_3 2} \\ &= 2^{\log_3 3} = 2 \end{aligned}$$

12. $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} y = 2$ 일 때, $\log_x y$ 의 값은?

① -4

② -1

③ $\frac{1}{4}$

④ 1

⑤ 4

해설

$$\log_{\frac{1}{2}} y = -\log_2 y = 2 \text{ 이므로}$$

$$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

13. 양수A에 대하여 $\log A = -2.341$ 일 때, 정수 부분과 소수 부분을 바르게 나타낸 것은?

① 정수 부분 : -1 , 소수 부분 : 0.659

② 정수 부분 : -2 , 소수 부분 : 0.341

③ 정수 부분 : -2 , 소수 부분 : 0.659

④ 정수 부분 : -3 , 소수 부분 : 0.341

⑤ 정수 부분 : -3 , 소수 부분 : 0.659

해설

$$\begin{aligned}-2.341 &= -2 - 0.341 = (-2 - 1) + (1 - 0.341) \\ &= -3 + 0.659\end{aligned}$$

따라서 정수 부분은 -3 , 소수 부분은 0.659 이다.

14. $\log x = \bar{2}.6044$ 일 때, $\log x^2$ 의 값은?

① $\bar{2}.3022$

② $\bar{3}.2088$

③ $\bar{4}.5110$

④ $\bar{5}.4890$

⑤ $\bar{6}.5110$

해설

$$\log x = \bar{2}.6044 = -2 + 0.6044 \text{ 이므로}$$

$$\log x^2 = 2 \log x$$

$$= 2(-2 + 0.6044)$$

$$= -4 + 1.2088$$

$$= -3 + 0.2088$$

$$= \bar{3} + 0.2088$$

15. 수열 $\log_{10}(n+2)$ 의 제 98항은?

① $\log_2 10$

② $\log_2 100$

③ 10

④ 1

⑤ 2

해설

$a_n = \log_{10}(n+2)$ 이므로

$$a_{98} = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2$$

따라서, 제 98항은 2이다.

16. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[3]{-64} = -4$

② $\sqrt[4]{81} = 3$

③ $\sqrt[5]{-32} = -2$

④ $-\sqrt[3]{0.008} = -0.2$

⑤ $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = 1$

해설

$$\begin{aligned} & \textcircled{5} (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}) \\ &= \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{2^3} = 5 \end{aligned}$$

17. $x \geq 0$ 일 때, $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$ 를 간단히 하면?

① $x \sqrt{x}$

② $x \sqrt[4]{x}$

③ $\sqrt[8]{x}$

④ $\sqrt[8]{x^3}$

⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{x \sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}} \\ &= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

18. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^3 \sqrt{4}}$ 를 $4^{\frac{n}{m}}$ 으로 나타낼때, $m+n$ 의 값은? (단, m, n 은 서로소인 자연수)

① 21

② 22

③ 39

④ 41

⑤ 49

해설

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} &= \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2^3 \sqrt{4}}\end{aligned}$$

또한, $2^3 \sqrt{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$$\sqrt[3]{2^3 \sqrt{4}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^3 \sqrt{4}} \\ = 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18} + \frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}}\end{aligned}$$

$$\therefore m = 36, n = 13$$

$$\therefore m + n = 49$$

19. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $(-100)^0$

② $a^2 \times a \div a^3$

③ $\frac{3^3 \div 3^2}{3}$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \frac{1}{a^2\sqrt{3}}$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \frac{a^3}{a^3\sqrt{2}}$

해설

① $(-100)^0 = 1$

② $a^2 \times a \div a^3 = a^{2+1-3} = a^0 = 1$

③ $\frac{3^3 \div 3^2}{3} = \frac{3^{3-2}}{3} = \frac{3}{3} = 1$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \frac{1}{a^2\sqrt{3}}$
 $= a^{-\sqrt{3}} \times a^{3\sqrt{3}} \times a^{-2\sqrt{3}}$
 $= a^{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = a^0 = 1$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \frac{a^3}{a^3\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}} \times a^3 \div a^{3\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}} = a^{3-2\sqrt{2}}$

20. $x > y > 0$ 일 때, $\frac{x^y y^x}{y^y x^x}$ 를 간단히 하면?

① $(x - y)^{\frac{y}{x}}$

② $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}$

③ 1

④ $\left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$

⑤ $(x - y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$$

21. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠ } \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}} \\ &\therefore \text{참}\end{aligned}$$

$$\text{㉡ } \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8 \quad \therefore \text{거짓}$$

$$\text{㉢ } (3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}} \quad \therefore \text{거짓}$$

22. $x = 2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16

② 64

③ 256

④ 1024

⑤ 65536

해설

$$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$$

$2^{10} = 1024$, $2^6 = 64$ 이므로

$$\therefore 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$$

23. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

① 3

② $\sqrt{3}$

③ 5

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$$

24. $a = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ 일 때, $\sqrt[6]{24}$ 를 a , b 로 나타낸 것은?

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$

③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$

④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$

⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

해설

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \quad b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt[6]{24} &= \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{3} \\ &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

25. $\frac{1}{2} \log_2 3 + 5 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \log_2 3 + 5 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ &= \log_2 \sqrt{3} + \log_2 4 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{3} \times 4 \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ &= \log_2 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

26. $x = \frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x 과 같은 것은?

① a

② b

③ a^b

④ b^2

⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \frac{\frac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\log_b b} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$

27. $5^a = 2$, $5^b = 3$ 이라 할 때, $\log_6 72$ 를 a 와 b 의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{a+b}{a-b}$

② $\frac{2a+b}{b-a}$

③ $\frac{2a-b}{a+b}$

④ $\frac{2a+b}{a+b}$

⑤ $\frac{3a+2b}{a+b}$

해설

$$a = \log_5 2, b = \log_5 3$$

$$\log_6 72 = \frac{3 \log_5 2 + 2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a + 2b}{a + b}$$

28. a, x, y 가 양의 실수이고 $A = \log_a \frac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \frac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$ 와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$

② $\log_a \frac{1}{y^5}$

③ $\log_a \frac{1}{xy}$

④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$

⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$$3A + 2B$$

$$= 3(2 \log_a x - 3 \log_a y) + 2(2 \log_a y - 3 \log_a x)$$

$$= -5 \log_a y = \log_a \frac{1}{y^5}$$

29. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(20^x) = \frac{1}{x} - \log_3 5$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$

⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$$20^x = 3 \text{ 이라 하면 } x = \log_{20} 3$$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

30. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80

② 4.04

③ 4.28

④ 4.32

⑤ 4.43

해설

$$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80 \text{ 이고}$$

$$\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$$

$$= \log 0.063 \text{ 이므로 } b = 0.063$$

$$\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$$

31. $\log(31.4 \times A) = 1.0471$ 일 때, 양수 A 의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구한 것은?

수	0	1	2	3	4	5
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5326	.5250
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378
3.5	.5441	.5435	.5465	.5478	.5490	.5502

① 0.3020

② 0.355

③ 1.35

④ 2.30

⑤ 2.33

해설

$\log(31.4 \times A) = 1.0471$ 에서

$\log 31.4 + \log A = 1.0471$

$\log A = 1.0471 - \log 31.4$

$= 1.0471 - (1 + \log 3.14)$

$= 1.0471 - (1 + 0.4969)$ ($\therefore$ 로그표에서 $\log 3.14 = 0.4969$)

$= -0.4498$

$= -1 + 0.5502$

그런데 주어진 로그표에서 $\log 3.55 = 0.5502$ 이므로 $A = 0.355$ 이다.

32. 다음 <보기>의 상용로그 중 그 소수 부분이 $\log 55$ 의 소수 부분과 같은 것의 개수를 구하면? (단, $\log 550 = 2.7404$)

보기

㉠ $\log 5.05$

㉡ $\log 0.00055$

㉢ $\log \frac{1}{550}$

㉣ $\log(5.5 \times 10^{10})$

㉤ $\log 5.5^{10}$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\log 550$ 의 진수 550과 소숫점의 위치만 다르고 숫자의 배열이 같은 수의 상용로그의 소수 부분은 $\log 550$ 의 소수 부분과 같다. 따라서 <보기> 중 $\log 550$ 과 소수 부분이 같은 것은 ㉡, ㉣의 2개이다.

33. 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, 수열 $b_n = 2^{a_n}$ 이다.
수열 $\{b_n\}$ 에서 처음으로 2000보다 커지는 항은? (단, $\log 2 = 0.3010$)

① 제5항

② 제6항

③ 제7항

④ 제8항

⑤ 제9항

해설

$$a_n = 2n \text{ 이므로 } b_n = 2^{2n}$$

$$4^n > 2000 \text{ 에서 } 2n \log 2 > \log 2000$$

$$\therefore n > \frac{3.3010}{0.6020} = 5.48 \times \times \times$$

따라서 제6항부터 처음으로 2000보다 커진다.

34. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

35. $a = \log_3 \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ 일 때, $3^a - 3^{-a}$ 의 값은?

① $-2\sqrt{2}$

② -2

③ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

④ $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

⑤ $\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$

해설

$$a = \log_3 \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \text{ 에서}$$

$$3^a = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

$$\begin{aligned} 3^{-a} &= \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right)^{-1} = (\sqrt{5} - 1)^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^a - 3^{-a} &= \sqrt{5} - 1 - \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \\ &= \frac{4\sqrt{5} - 4 - \sqrt{5} - 1}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{5} - 5}{4} \end{aligned}$$

36. 방정식 $2x^2 - 8x - 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값은?

① -2

② -8

③ -12

④ -26

⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\log_{10} a + \log_{10} b = 4,$$

$$\log_{10} a \cdot \log_{10} b = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \\ &= \frac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2 \log_{10} a \cdot \log_{10} b}{\log_{10} a \cdot \log_{10} b} \\ &= \frac{16 + 1}{-\frac{1}{2}} = -34\end{aligned}$$

37. 세 수 $3\log_3 3$, $\log_2 3$, $2\log_2 4$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $2\log_2 4 < 3\log_3 3 < \log_2 3$ ② $\log_2 3 < 2\log_2 4 < 3\log_3 3$
③ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$ ④ $3\log_3 3 < 2\log_2 4 < \log_2 3$
⑤ $3\log_3 3 < \log_2 3 < 2\log_2 4$

해설

$$3\log_3 3 = 3$$

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \quad \therefore 1 < \log_2 3 < 2$$

$$2\log_2 4 = 4$$

$$\therefore \log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$$

38. $\log a = 0.08$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^{20}$ 은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나타나는가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\log \left(\frac{1}{a}\right)^{20} = \log a^{-20} = -20 \log a = -20 \times 0.08$$

$$= -1.6 = -2 + 0.4 = \bar{2}.4$$

따라서 지표가 -2 이므로 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나온다.

39. 양의 실수 A 에 대하여 상용로그 $\log \frac{1}{A}$ 의 정수 부분과 소수 부분이
이차방정식 $3x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 두 근일 때, $\log A$ 의 소수 부분은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{5}$

해설

상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 의미를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\log \frac{1}{A} = n + \alpha \quad (n \text{은 정수, } 0 \leq \alpha < 1) \text{라 하면}$$

$$n + \alpha = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$\therefore n = 1, \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\log A = -\frac{5}{3} = -2 + \frac{1}{3}$$

따라서 $\log A$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{3}$ 이다.

40. $\frac{[\log 20010] + [\log 2.001]}{[\log 0.02001]}$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수)

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$[\log x]$ 는 x 의 지표이므로

$$[\log 20010] = 4, [\log 2.001] = 0, [\log 0.02001] = -2$$

$$\therefore \frac{[\log 20010] + [\log 2.001]}{[\log 0.02001]} = \frac{4 + 0}{-2} = -2$$

41. 수열 $\log_3 a_1, \log_3 a_2, \log_3 a_3, \dots, \log_3 a_n, \dots$ 이 공차가 -1 인 등차수열일 때, 수열 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은?(단, $a_1 = \frac{1}{6}$)

① $3^{19} - 3$

② $3^{10} - 3$

③ $3^{11} - 3$

④ $3^{12} - 3$

⑤ $3^{13} - 3$

해설

$\log_3 a_{n+1} - \log_3 a_n = -1$ 이므로

$$\log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1 \text{ 에서 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} \\ = \frac{6(3^{10} - 1)}{3 - 1} = 3^{11} - 3 \left(\because \frac{1}{a_1} = 6 \right) \end{aligned}$$

42. 반지름의 길이가 r 인 구의 겉넓이 S 와 부피 V 는 다음과 같다.

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

다음 중 r 의 값에 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 것은?

- ① $\log S - \frac{1}{3} \log V$ ② $\log S - \frac{2}{3} \log V$ ③ $\log S - \log V$
 ④ $\log S - \frac{4}{3} \log V$ ⑤ $\log S - \frac{5}{3} \log V$

해설

$$\log S = \log 4\pi + 2 \log r \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log V = \log \frac{4}{3}\pi + 3 \log r \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} \times 3 - \textcircled{㉡} \times 2$ 에서

$$3 \log S - 2 \log V$$

$$= 3 \log 4\pi - 2 \log \frac{4}{3}\pi$$

$$= 3(\log S - \frac{2}{3} \log V) (\text{일정})$$

43. Richter는 지진의 규모를 M , 지진의 진앙지로부터 100km 떨어진 곳에서 측정한 지진의 강도를 I 라 할 때, $M = \log_{10} \frac{I}{S}$ (단, S 는 상수)로 나타내기로 했다. 지난 5월 12일 중국 쓰촨성에서 발생한 지진의 규모가 8.0이었고, 도호쿠 지진의 강도는 7.2이었다. 이때, 쓰촨성 지진의 강도는 도호쿠 지진의 강도의 몇 배인가?

<상용로그표>

수	0	1	2	3	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	...
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	...
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	...
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

① 6.15

② 6.20

③ 6.26

④ 6.31

⑤ 6.35

해설

쓰촨성 지진의 강도를 I_1 , 도호쿠의 지진의 강도를 I_2 라 하면

$$\log_{10} \frac{I_1}{S} = 8.0 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$\log_{10} \frac{I_2}{S} = 7.2 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} - \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } \log_{10} \frac{I_1}{I_2} = 0.8 = \log_{10} 6.31$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = 6.31$$

44. 다음 세 수 $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{6}$ 의 대소관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2} > \sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{6}$

② $\sqrt{2} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[4]{5}$

③ $\sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6}$

④ $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{6} > \sqrt{2}$

⑤ $\sqrt[6]{6} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

해설

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}}$ 이므로 각 수를 12제곱 한다.

$$(\sqrt{2})^{12} = (2^{\frac{1}{2}})^{12} = 2^6 = 64$$

$$(\sqrt[4]{5})^{12} = (5^{\frac{1}{4}})^{12} = 5^3 = 125$$

$$(\sqrt[6]{6})^{12} = (6^{\frac{1}{6}})^{12} = 6^2 = 36$$

$125 > 64 > 36$ 이므로

$$\sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6}$$

45. $x^2 - 6x - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $2^{\frac{1}{\alpha^2-3}} \times 2^{\frac{1}{\beta^2-3}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

② $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$

③ $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ 5

해설

α, β 가 $x^2 - 6x - 3 = 0$ 의 근이므로

$$\alpha^2 - 6\alpha - 3 = 0, \beta^2 - 6\beta - 3 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 3 = 6\alpha, \beta^2 - 3 = 6\beta$$

$$\begin{aligned}\therefore 2^{\frac{1}{\alpha^2-3}} \times 2^{\frac{1}{\beta^2-3}} &= 2^{\frac{1}{6\alpha}} \times 2^{\frac{1}{6\beta}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})} \\ &= 2^{\frac{1}{6} \times \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}\end{aligned}$$

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = -3 \text{ 이므로}$$

$$2^{\frac{1}{6} \times \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

46. $\log_2 6$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라고 할 때, $\frac{2^{x+y} - 2^{x-y}}{2^x + 2^y}$ 의 값은?

① $\frac{4}{39}$

② $\frac{9}{43}$

③ $\frac{19}{69}$

④ $\frac{23}{73}$

⑤ $\frac{20}{33}$

해설

$$\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 \text{ 이므로 } 2 < \log_2 6 < 3$$

$$\text{따라서 } x = 2, y = \log_2 6 - 2 = \log_2 \frac{6}{4} = \log_2 \frac{3}{2}$$

$$2^x = 2^2 = 4, 2^y = 2^{\log_2 \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}, 2^{-y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2^{x+y} - 2^{x-y}}{2^x + 2^y} = \frac{2^x \cdot 2^y - 2^x \cdot 2^{-y}}{2^x + 2^y}$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{2}{3}}{4 + \frac{3}{2}} = \frac{20}{33}$$

47. $f(x)$ 는 양수 x 의 상용로그의 정수 부분을 나타낸다고 한다.
이때, $f(x) + f(3) + f(5) + \cdots + f(2015)$ 의 값을 구하면?

① 2467

② 2468

③ 2469

④ 2470

⑤ 2471

해설

$$f(1) = f(3) = \cdots = f(9) = 0$$

$$f(11) = \cdots = f(99) = 1$$

$$f(101) = \cdots = f(999) = 2$$

$$f(1001) = \cdots = f(2015) = 3$$

$$5 \times 0 + 45 \times 1 + 450 \times 2 + 508 \times 3$$

$$= 45 + 900 + 1524 = 2469$$

48. 5^{100} , 11^{100} 은 각각 70자리, 105자리의 수이다. 이때 55^{10} 의 자릿수는?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

5^{100} 이 70자리의 수이므로 $\log 5^{100}$ 의 지표는 69이다.

$$69 \leq \log 5^{100} < 70, \quad 69 \leq 100 \log 5 < 70$$

$$0.69 \leq \log 5 < 0.7 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

11^{100} 이 105자리의 수이므로 $\log 11^{100}$ 의 지표는 104이다.

$$104 \leq \log 11^{100} < 105, \quad 104 \leq 100 \log 11 < 105$$

$$1.04 \leq \log 11 < 1.05 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\log 55^{10} = 10 \log 55 = 10(\log 5 + \log 11)$$

① + ②을 하면

$$1.73 \leq \log 5 + \log 11 < 1.75$$

$$17.3 \leq 10 \log 55 < 17.5$$

따라서 $\log 55^{10}$ 의 지표가 17이므로 55^{10} 은 18자리의 수이다.

49. $\log x$ 의 정수 부분이 5이고 $\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. 이때 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분과 소수 부분의 곱은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$\log x$ 의 소수 부분을 α 라고 하면

$$\log x = 5 + \alpha (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(5 + \alpha) = \frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 + \frac{1 + \alpha}{2} \end{aligned}$$

이때 $0 \leq \alpha < 1$ 이므로

$$1 \leq 1 + \alpha < 2, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1 + \alpha}{2} < 1$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\frac{1 + \alpha}{2}$ 이다.

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\alpha + \frac{1 + \alpha}{2} = 1, \quad \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

그러므로 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은

$$\frac{1 + \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

따라서 소수 부분과 정수 부분의 곱은 $\frac{4}{3}$

50. 1년에 화폐가치가 10% 씩 절하된다고 할 때, 화폐 가치가 처음보다 90% 이상 절하되려면 최소 몇 년 후인가? (단, $\log_{10} 3 = 0.477$ 이다.)

① 14

② 16

③ 18

④ 20

⑤ 22

해설

처음 화폐 가치를 a 라 하면

$$1 \text{ 년 후 가치} = 0.9a$$

$$2 \text{ 년 후 가치} = 0.9^2 a$$

$\vdots$

$$n \text{ 년 후 가치} = 0.9^n a$$

$$0.9^n a \leq 0.1a$$

$$0.9^n \leq 0.1$$

$$\log 0.9^n \leq \log^{0.1}$$

$$n \log \frac{9}{10} \leq \log \frac{1}{10}$$

$$n(2 \log 3 - 1) \leq -1$$

$$n(2 \times 0.477 - 1) \leq -1$$

$$n \times (-0.046) \leq -1$$

$$n \geq \frac{1}{0.046} = \frac{1000}{4.6} = 21.739 \dots$$

$$\therefore n = 22$$