

1. $\left\{ \frac{n^2 - 1}{n(n+1)} \right\}$ 의 제 100항은?

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{9}{10}$

③ $\frac{99}{100}$

④ $\frac{99}{101}$

⑤ $\frac{101}{100}$

해설

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n(n+1)} \right\} = \frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \text{제 100항은 } \frac{99}{100}$$

2. $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 10항은?

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{1}{11}$

③ $\frac{1}{110}$

④ $\frac{1}{111}$

⑤ $\frac{1}{1010}$

해설

$$\frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{1}{110}$$

3. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = 3n + 6$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = 3, d = -3$ ② $a = 3, d = 3$ ③ $a = 6, d = 3$

④ $a = 9, d = 3$ ⑤ $a = 9, d = -3$

해설

$a_n = 3n + 6$ 이므로
 $a_1 = 3 \cdot 1 + 6 = 9,$
 $a_2 = 3 \cdot 2 + 6 = 12$ 이므로
 $d = a_2 - a_1 = 3$

4. 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $3n - 2$

② $3n - 1$

③ $3n$

④ $3n + 1$

⑤ $3n + 3$

해설

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$$

5. 첫째항이 8, 공차가 -7 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-7n + 1$

② $-7n + 15$

③ $-7n - 15$

④ $7n + 15$

⑤ $7n - 15$

해설

$$a_n = 8 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 15$$

6. 등차수열 $10, 6, 2, -2, -6, \dots$ 에서 공차를 d , 제 10 항을 b 라 할 때, $b + d$ 의 값은?

① -10 ② -20 ③ -30 ④ -40 ⑤ -50

해설

공차는 -4 이므로 $d = -4$

$$a_n = 10 + (n - 1)(-4) = -4n + 14$$

$$\therefore a_{10} = -4 \cdot 10 + 14 = -26 \text{ 에서 } b = -26$$

$$\therefore b + d = -26 + (-4) = -30$$

7. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27

② 10, 23, 29

③ 11, 23, 27

④ 11, 23, 29

⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2} = 11$, 이 수열의 공차는 6이다.

따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

8. 첫째항이 $\frac{7}{4}$, 공차가 $\frac{3}{4}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합은?

- ① $\frac{167}{4}$ ② $\frac{235}{4}$ ③ $\frac{527}{4}$ ④ $\frac{1105}{4}$ ⑤ $\frac{1054}{4}$

해설

$$\text{구하는 합을 } S_{17} = \frac{17 \left\{ 2 \cdot \frac{7}{4} + (17-1) \cdot \frac{3}{4} \right\}}{2} = \frac{527}{4}$$

9. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

- ☐ ㉠ 1, 4, 9, 16, 25,...
- ☐ ㉡ 3, 9, 27, 81, 243,...
- ☐ ㉢ 9, 99, 999, 9999, 99999,...
- ☐ ㉣ 2, 3, 4, 9, 8, 27
- ☐ ㉤ $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

- ☐ ① ㉠
- ☐ ② ㉠, ㉡
- ☐ ③ ㉡, ㉣
- ☒ ④ ㉡, ㉤
- ☐ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3인 등비수열이다.
㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

10. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

2, 4, 8, 16, ⋯

① $(-2)^n$

② 2^{n-1}

③ 2^{n+1}

④ 2^n

⑤ $(-2)^{n-1}$

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고 공비가 2이므로 $a_n = 2^n$

11. 등비수열 $-3, 6, -12, 24, -48, \dots$ 에서 384는 제 몇 항인가?

① 제 6항

② 제 7항

③ 제 8항

④ 제 9항

⑤ 제 10항

해설

주어진 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면 첫째항이 -3 이고, 공비가 -2 이므로

$$a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$$

$$(-3) \cdot (-2)^{n-1} = 384 \text{ 에서 } (-2)^{n-1} = -128 = (-2)^7$$

$$n-1 = 7 \quad \therefore n = 8$$

12. 첫째항이 1, 공비가 2, 끝항이 512인 등비수열의 합은?

- ① 511 ② 512 ③ 1023 ④ 1024 ⑤ 2047

해설

$$512 = 1 \cdot 2^{n-1} \text{에서 } n = 10$$

$$\therefore a = 1, r = 2, n = 10$$

$$\therefore S_{10} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$$

13. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{2015} 의 값은?

- ① $\frac{2012}{2013}$ ② $\frac{2013}{2014}$ ③ $\frac{2014}{2015}$ ④ $\frac{2015}{2016}$ ⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 n 항의 분자는 n 이고 분모는 $n+1$ 이다.

따라서 구하는 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.

$$\therefore a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$$

14. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

15. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$$

16. 등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차를 d 로 놓으면
305는 제 102항이므로

$$305 = 2 + (102 - 1)d$$

$$\therefore d = \frac{303}{101} = 3$$

17. 세 수 $5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 등차수열을 이루면 $4 - x$ 가 등차중항이므로

$$4 - x = \frac{(5 - 2x) + (6 + 3x)}{2}$$

$$2(4 - x) = 5 - 2x + 6 + 3x$$

$$8 - 2x = 11 + x$$

$$-3x = 3 \quad \therefore x = -1$$

18. 수열 $-3, a, b, c, 13$ 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

$$a - (-3) = d$$

$$b - a = d$$

$$c - b = d$$

$$13 - c = d$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

$$\text{더하면 } 13 - (-3) = 4d \therefore d = 4$$

$$\therefore a = -3 + 4 = 1$$

$$b = 1 + 4 = 5$$

$$c = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

19. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항

② 제 10항

③ 제 11항

④ 제 12항

⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, \quad 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

20. 조화수열 12, 6, 4, 3, ...의 일반항은?

- ① $\frac{12}{n}$ ② $\frac{8}{n}$ ③ $\frac{6}{n}$ ④ $\frac{3}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \dots$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$$\therefore a_n = \frac{12}{n}$$

21. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$ 일 때, S_{10} 의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 25 \text{ 에서 } a + 2d = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2} = 49 \text{ 에서 } a + 3d = 7 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$d = 2, a = 1$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

22. 등비증항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, □안에 알맞은 수를 모두 더하면?

-2, □, -8, □, □, 64,...

- ① -11 ② -12 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b 라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8)$, $b^2 = 16$
따라서 $b = 4$ 이고 공비는 -2 인 수열이 되므로 구하는 수열은
 $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$
 $\therefore 4 + 16 - 32 = -12$

23. 양수 x, y 에 대하여 $\sqrt{2} + 1, x, \sqrt{2} - 1, y$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x + y$ 의 값은?

① $-2\sqrt{2}$

② $1 - 2\sqrt{2}$

③ $4 - 2\sqrt{2}$

④ $1 + 2\sqrt{2}$

⑤ $4 + 2\sqrt{2}$

해설

x 는 $\sqrt{2} + 1$ 과 $\sqrt{2} - 1$ 의 등비중항이므로

$x^2 = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$ 이므로

$\therefore x = 1$ ($\because x > 0$)

따라서 이 수열의 공비는 $\sqrt{2} - 1$ 이므로

$y = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4 - \sqrt{2}$

24. 양수 a, b 에 대하여 세 수 $\log 2, \log a, \log 8$ 이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, b, 16$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$2 \log a = \log 2 + \log 8$$

$$a^2 = 16, \quad \therefore a = 4$$

$$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore b = 8$$

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

25. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$

② $2^{10} - 1$

③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$

⑤ $2^{10} + 3$

해설

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$

$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (2^9 - 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

26. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3$ 의 값은?

- ① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 + 3a_k^2 + 3a_k + 1) - \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 - 3a_k^2 + 3a_k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6a_k^2 + 2) = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= 6 \times 20 + 2 \times 10 = 140 \end{aligned}$$

27. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

- ① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \sum_{j=1}^{10} j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) = 385 \end{aligned}$$

28. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$

- ① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로
 $3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

29. $\sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5

② -7

③ -8

④ -79

⑤ -80

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{80} - \sqrt{81} \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{81} \\ &= 1 - 9 = -8 \end{aligned}$$

30. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$
⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

31. 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$ 과 같은 것은?

① $a_{20} - a_9$

② $a_{20} - a_{10}$

③ $a_{21} - a_9$

④ $a_{21} - a_{10}$

⑤ $a_{21} - a_{11}$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ 이므로} \\ a_{21} &= a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20} \\ b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20} \\ &= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_9) \\ &= a_{21} - a_{10} \end{aligned}$$

32. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n - 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5

② -10

③ -15

④ -20

⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

$$\therefore a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$$

33. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ① $0, k$

② $0, k + 1$

③ $0, k - 1$

④ $1, k$

⑤ $1, k + 1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ 도 참이다.

34. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 - n$ 으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$$

$$= 2n - 2$$

(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$

(i), (ii)에서 $a_n = 2n - 2$ ($n \geq 1$)

$$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 - 2 = 18$$

35. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

- ① 124 ② 132 ③ 145 ④ 155 ⑤ 162

해설

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 5 \\ S_{20} &= \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 30 \\ r^{10}+1 &= 6 \text{ 이므로 } r^{10} = 5 \\ S_{30} &= \frac{a(r^{30}-1)}{r-1} \\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \text{ 이므로} \\ S_{30} &= \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 5 \cdot (r^{20}+r^{10}+1) \\ &= 5 \cdot (5^2+5+1) \\ &= 5 \cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

36. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $S_n = 2 \cdot 3^n + k$ 이다. 이때, 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되도록 하는 상수 k 의 값과 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

① $k = -1, a_n = 4 \cdot 3^n$

② $k = -1, a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

③ $k = -1, a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

④ $k = -2, a_n = 4 \cdot 3^n$

⑤ $k = -2, a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2 \cdot 3^{n-1} + k = 6 + k$

(ii) $n = 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k)$$

$$= 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$$

따라서 수열 $a_2, a_3, a_4, \dots$ 는 공비가 3인 등비수열이다.

(i), (ii)로부터 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되려면

$6 + k, 4 \cdot 3, 4 \cdot 3^2, 4 \cdot 3^3, \dots$ 이 등비수열이 되어야 하므로

$$6 + k = 4 \cdot 1 \quad \therefore k = -2$$

$$\text{따라서 } k = -2, a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$$

37. 등차수열 2, 5, 8, $\dots$, 68의 합을 기호 $\sum$ 를 써서 나타내면 $\sum_{k=1}^n (ak+b)$ 이다. 이때 상수 a , b , n 의 합 $a+b+n$ 의 값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 21

② 22

③ 23

④ 24

⑤ 25

해설

주어진 등차수열은 첫째항이 2, 공차가 3이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n-1$

이때, $3n-1 = 68$ 에서

$$3n = 69 \quad \therefore n = 23$$

$$\text{즉, } 2+5+8+\dots+68 = \sum_{k=1}^{23} (3k-1)$$

$$\therefore a = 3, b = -1, n = 23$$

$$\therefore a+b+n = 3-1+23 = 25$$

38. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 - n + 3$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^5 a_{2k-1}$ 의 값은?

① 82

② 84

③ 86

④ 88

⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n + 3 - \{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\} \\ &= 4n - 3 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ &= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88 \end{aligned}$$

39. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^3 - n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$ 의 값은?

- ① $\frac{17}{19}$
- ② $\frac{17}{30}$
- ③ $\frac{19}{40}$
- ④ $\frac{17}{50}$
- ⑤ $\frac{19}{60}$

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - n) - \{(n-1)^3 - (n-1)\} = 3n(n-1) (n \geq 2)$$
$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) (n \geq 2)$$
$$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$$
$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{20} \right) = \frac{19}{60}$$

40. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{20} 의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$

② $2 \cdot 3^{19} + 1$

③ $2 \cdot 3^{20} - 1$

④ $2 \cdot 3^{20} + 1$

⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$ 꼴로 변형한다.

$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ 의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$ 에서

$-2\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = -1$

즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

따라서 수열 $\{a_n + 1\}$ 은

첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$ 이고 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$

$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

41. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ 이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)을 만족할 때, a_{100} 의 값을 구하면?

- ① 2^{10} ② 2^{20} ③ 2^{40} ④ 2^{80} ⑤ 2^{100}

해설

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 2b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$
 $a_n = 2^n$
 $\therefore a_{100} = 2^{100}$

42. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의될 때, a_{15} 의 값은?

- ① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{29}$ ④ $\frac{1}{31}$ ⑤ $\frac{1}{39}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1} \text{ 에서 양변에 역수를 취하면 } \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{ 이라 두면 } b_{n+1} = b_n + 2, b_1 = 3$$

$$\text{따라서, } b_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2n + 1}$$

$$\therefore a_{15} = \frac{1}{31}$$

43. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \cdots \textcircled{㉠}$ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{(가)}$
 $= k^2 + \boxed{(가)} = \boxed{(나)}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{㉠}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① $2k - 1, (k + 1)^2$
- ② $2k, k + 1$
- ③ $2k, (k + 1)^2$
- ④ $2k + 1, k + 1$
- ⑤ $2k + 1, (k + 1)^2$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k + 1}$ 를 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{2k + 1}$
 $= k^2 + \boxed{2k + 1} = \boxed{(k + 1)^2}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{㉠}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore (가) = 2k + 1, (나) = (k + 1)^2$

44. 매년 초 100 만원을 연이율 5%로 은행에 적금할 때, 10년 후의 원리
합계는? (단, 이자는 1년마다 복리로 계산하고, $1.05^{10} = 1.63$)

① 163만원

② 1050만원

③ 1230만원

④ 1323만원

⑤ 1630만원

해설

원리합계 S 는

$$S = 100(1 + 0.05) + 100(1 + 0.05)^2 + \cdots + 10(1 + 0.05)^{10}$$

$$= \frac{100 \times 1.05(1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$= \frac{105(1.05^{10} - 1)}{0.05} = \frac{105(1.63 - 1)}{0.05}$$

$$= \frac{105 \times 0.63}{0.05} = 1323(\text{만원})$$

45. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ 일 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

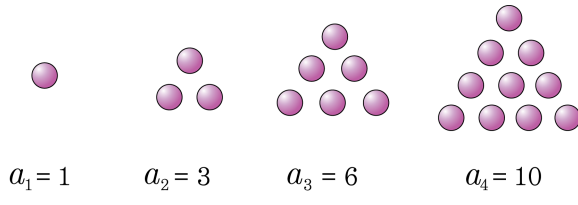
- ㉠ $a_3 = 36$
- ㉡ $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
- ㉢ $\{\log_{10} a_n\}$ 은 등차수열이다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$
 $a_1 = S_1 = 4$ 이므로
 $a_n = (2 \cdot 3^n - 2) - (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$
㉠ $a_3 = 36$
㉡ $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.
㉢ $\{\log_{10} a_n\}$ 은 첫째항이 $\log_{10} 4$, 공차가 $\log_{10} 3$ 인 등차수열이다.

46. 다음 그림과 같이 규칙적인 구슬의 개수를 증가시키면서 정삼각형의 모양을 만들 때, 필요한 구슬의 개수를 삼각수라고 한다. 이 삼각수들의 수열을 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?



- ① 1500 ② 1510 ③ 1520 ④ 1530 ⑤ 1540

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 3, 6, 10, \dots$
 $\{b_n\} : 2, 3, 4, \dots$
 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 1 인 등차수열이므로
 $b_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1$
 $\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$

$$= 1 + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} \frac{k^2+k}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2} \right)$$

$$= 1540$$

47. 수열 a_n 을 다음과 같이 정의한다.
 $a_n = 10^{n-1} + 10^{-n}$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)
 $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라고 할 때,
 $\sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{1}{9} \{10^{\text{㉠}} + 10^{\text{㉡}} + \text{㉢}\}$ 이다.

이때, $\text{㉠} + \text{㉡} + \text{㉢} + \text{㉣}$ 의 값은?

- ① 29
- ② 69
- ③ 71
- ④ 93
- ⑤ 111

해설

$$b_n = \sum_{k=1}^n (10^{k-1} + 10^{-k})$$

$$= \frac{10^n - 1}{10 - 1} + \frac{\frac{1}{10} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ 10^n - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right\}$$

$$\therefore, b_n = \frac{10^n - 10^{-n}}{9} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{10} (10^k - 10^{-k})$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ \frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} - \frac{\frac{1}{10}(1 - 10^{-10})}{1 - \frac{1}{10}} \right\} = \frac{1}{81} (10^{11} + 10^{-10} - 11)$$

$$\therefore \text{㉠} + \text{㉡} + \text{㉢} + \text{㉣} = 81 + 11 - 10 - 11 = 71$$

48. 다음과 같이 나열된 55개의 수를 모두 더하면?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1^2 \\ & & & & & 1^2 & 1^2 \\ & & & 1^2 & 2^2 & 3^2 & \\ & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 10^2 & \end{array}$$

- ① 1210 ② 1230 ③ 1250 ④ 1270 ⑤ 1290

해설

n 번째 행의 수의 합은

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

따라서, 제 1행에서 제 10행까지의 모든 수의 합은

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} (\sum_{n=1}^{10} 2n^3 + \sum_{n=1}^{10} 3n^2 + \sum_{n=1}^{10} n) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 2 \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 + 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right\} \\ &= 1210 \end{aligned}$$

49. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족
시킬 때, a_{10} 의 값은?

- ① $\frac{9}{4}$
- ② $\frac{11}{4}$
- ③ $\frac{13}{4}$
- ④ $\frac{15}{4}$
- ⑤ $\frac{17}{4}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $n = 1, 2, 3, \dots, n$ 을 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{1 \cdot 3}{2^2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot 4}{3^2} a_2$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot 5}{4^2} a_3$$

$$\vdots$$

$$\times \Bigg) a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} a_{n-1}$$

$$\therefore a_2 \cdot a_3 \cdots \cdots a_n$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{2n} \cdot a_1$$

$$a_1 = 5 \text{ 를 대입하면 } a_n = \frac{5(n+1)}{2n}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{5 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{4}$$

50. 시험관 A 에는 $a\%$ 의 알콜 6g, 시험관 B 에는 $b\%$ 의 알콜 4g 들어있다. 두 시험관에서 A, B 에서 각각 1g씩 꺼내어 바꾸어 넣는 시행을 n 회 실시한 후 A, B 에 들어있는 알콜의 농도를 각각 $a\%, b\%$ 라 하면 다음이 성립한다. 이때, $p - q + r - s$ 의 값은?

$$a_{n+1} = pa_n + qb_n, \quad b_{n+1} = ra_n + sb_n$$

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1}\%$ 는 $a_n\%$ 5g 안에 들어있는 알콜과 $b_n\%$ 1g 안에 들어있는 알콜을 합한 전체 6g의 농도이므로

$$a_{n+1} = \frac{\frac{a_n}{100} \times 5 + \frac{b_n}{100} \times 1}{6} \times 100 = \frac{5a_n + b_n}{6}$$

같은 방법으로

$$b_{n+1} = \frac{\frac{a_n}{100} \times 1 + \frac{b_n}{100} \times 3}{4} \times 100 = \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

$$p = \frac{5}{6}, \quad q = \frac{1}{6}, \quad r = \frac{1}{4}, \quad s = \frac{3}{4}$$

$$\therefore p - q + r - s = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$$