1. $\left\{\dfrac{n^2-1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 100항은?

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{9}{10}$ ③ $\dfrac{99}{100}$ ④ $\dfrac{99}{101}$ ⑤ $\dfrac{101}{100}$

해설

$$\left\{\frac{n^2-1}{n(n+1)}\right\} = \frac{n-1}{n}$$

$\therefore$ 제 100항은 $\dfrac{99}{100}$

2. $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 10항은?

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{11}$ ③ $\dfrac{1}{110}$ ④ $\dfrac{1}{111}$ ⑤ $\dfrac{1}{1010}$

해설

$$\frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{1}{110}$$

3. 등차수열 a_n의 일반항이 $a_n = 3n + 6$일 때, 첫째 항 a와 공차 d는?

① $a = 3,\ d = -3$ ② $a = 3,\ d = 3$ ③ $a = 6,\ d = 3$

④ $a = 9,\ d = 3$ ⑤ $a = 9,\ d = -3$

해설

$a_n = 3n + 6$이므로

$a_1 = 3 \cdot 1 + 6 = 9,$

$a_2 = 3 \cdot 2 + 6 = 12$이므로

$d = a_2 - a_1 = 3$

4. 첫째항이 1, 공차가 3 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $3n-2$ ② $3n-1$ ③ $3n$

④ $3n+1$ ⑤ $3n+3$

해설

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$$

5. 첫째항이 8, 공차가 -7인 등차수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $-7n+1$ ② $-7n+15$ ③ $-7n-15$

④ $7n+15$ ⑤ $7n-15$

해설

$a_n = 8 + (n-1) \cdot (-7) = -7n + 15$

6. 등차수열 $10,\ 6,\ 2,\ -2,\ -6, \cdots$ 에서 공차를 d, 제 10항을 b라 할 때, $b+d$의 값은?

① -10 ② -20 ③ -30 ④ -40 ⑤ -50

해설

공차는 -4이므로 $d=-4$

$a_n = 10+(n-1)(-4) = -4n+14$

$\therefore a_{10} = -4 \cdot 10 + 14 = -26$에서 $b=-26$

$\therefore\ b+d = -26+(-4) = -30$

7. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27　② 10, 23, 29　③ 11, 23, 27

④ 11, 23, 29　⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2}=11$, 이 수열의 공차는 6이다.

따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

8. 첫째항이 $\frac{7}{4}$, 공차가 $\frac{3}{4}$인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합은?

① $\frac{167}{4}$ ② $\frac{235}{4}$ ③ $\frac{527}{4}$ ④ $\frac{1105}{4}$ ⑤ $\frac{1054}{4}$

해설

구하는 합은 $S_{17} = \dfrac{17\left\{2 \cdot \frac{7}{4} + (17-1) \cdot \frac{3}{4}\right\}}{2} = \dfrac{527}{4}$

9. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

㉠ $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \cdots$

㉡ $3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243, \cdots$

㉢ $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ 99999, \cdots$

㉣ $2,\ 3,\ 4,\ 9,\ 8,\ 27$

㉤ $\frac{4}{9},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{4}, \cdots$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉤ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3 인 등비수열이다.

㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

10. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

$2,\ 4,\ 8,\ 16, \cdots\cdots$

① $(-2)^n$　　② 2^{n-1}　　③ 2^{n+1}

④ 2^n　　⑤ $(-2)^{n-1}$

해설

주어진 수열은 첫째항이 2 이고 공비가 2 이므로 $a_n = 2^n$

11. 등비수열 $-3,\ 6,\ -12,\ 24,\ -48, \cdots$ 에서 384는 제 몇 항인가?

① 제 6항　② 제 7항　③ 제 8항

④ 제 9항　⑤ 제 10항

해설

주어진 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면 첫째항이 -3 이고, 공비가 -2 이므로

$a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$

$(-3) \cdot (-2)^{n-1} = 384$ 에서 $(-2)^{n-1} = -128 = (-2)^7$

$n - 1 = 7 \quad \therefore\ n = 8$

12. 첫째항이 1, 공비가 2, 끝항이 512 인 등비수열의 합은?

① 511 ② 512 ③ 1023 ④ 1024 ⑤ 2047

해설

$512 = 1 \cdot 2^{n-1}$ 에서 $n = 10$

$\therefore a = 1,\ r = 2,\ n = 10$

$$\therefore S_{10} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$$

13. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{2015} 의 값은?

① $\frac{2012}{2013}$ ② $\frac{2013}{2014}$ ③ $\frac{2014}{2015}$ ④ $\frac{2015}{2016}$ ⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 n 항의 분자는 n 이고 분모는 $n+1$ 이다.
따라서 구하는 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.

$$\therefore\ a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$$

14. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

15. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$

16. 등차수열 2, a_1, a_2, $a_3, \cdots$, a_{100}, 305 에서 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

등차수열 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100}, 305 에서 공차를 d로 놓으면
305는 제 102항이므로
$305 = 2 + (102 - 1)d$
$$\therefore\ d = \frac{303}{101} = 3$$

17. 세 수 $5-2x$, $4-x$, $6+3x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 1

해설

$5-2x$, $4-x$, $6+3x$가 등차수열을 이루면 $4-x$가 등차중항이므로

$$4-x=\frac{(5-2x)+(6+3x)}{2}$$

$$2(4-x)=5-2x+6+3x$$

$$8-2x=11+x$$

$$-3x=3 \quad \therefore\ x=-1$$

18. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$

$b-a=d$

$c-b=d$

$13-c=d$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

더하면 $13-(-3)=4d\quad \therefore d=4$

$\therefore a=-3+4=1$

$b=1+4=5$

$c=5+4=9$

$\therefore a+b+c=15$

19. 첫째항이 -25, 공차가 3인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항　② 제 10항　③ 제 11항　④ 제 12항　⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$3n - 28 > 0, \ 3n > 28$

$\therefore \ n > \dfrac{28}{3} = 9.33\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

20. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\dfrac{12}{n}$ ② $\dfrac{8}{n}$ ③ $\dfrac{6}{n}$ ④ $\dfrac{3}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \cdots$$

따라서 등차수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $\dfrac{n}{12}$

$$\therefore\ a_n = \frac{12}{n}$$

21. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64　　② 80　　③ 92　　④ 100　　⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 25 \text{에서 } a+2d=5 \cdots ㉠$$

$$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2} = 49 \text{에서 } a+3d=7 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d=2,\ a=1$

$$\therefore\ S_{10} = \frac{10(2\cdot 1+9\cdot 2)}{2} = 100$$

22. 등비중항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, $\square$안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$$-2,\ \square,\ -8,\ \square,\ \square,\ 64, \cdots$$

① -11　　② -12　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8)$, $b^2 = 16$

따라서 $b = 4$이고 공비는 -2인 수열이 되므로 구하는 수열은

$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ \cdots$

$\therefore\ 4 + 16 - 32 = -12$

23. 양수 x, y에 대하여 $\sqrt{2}+1$, x, $\sqrt{2}-1$, y가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x+y$의 값은?

① $-2\sqrt{2}$ ② $1-2\sqrt{2}$ ③ $4-2\sqrt{2}$

④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{2}$

해설

x는 $\sqrt{2}+1$과 $\sqrt{2}-1$의 등비중항이므로

$x^2=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$이므로

$\therefore\ x=1\ (\because\ x>0)$

따라서 이 수열의 공비는 $\sqrt{2}-1$이므로

$y=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

$\therefore\ x+y=4-\sqrt{2}$

24. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$2\log a = \log 2 + \log 8$

$a^2 = 16, \quad \therefore \ a = 4$

$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore \ b = 8$

$a + b = 4 + 8 = 12$

25. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$의 값은?

① $2^{10} - 3$　　② $2^{10} - 1$　　③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$　　⑤ $2^{10} + 3$

해설

$a_n = 2^n + (-1)^n$에서

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_9 \\ &= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots (2^9 - 1) \\ &= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1 \\ &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3 \end{aligned}$$

26. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$ 의 값은?

① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$$
$$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$$
$$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$$
$$= 6\times 20 + 2\times 10 = 140$$

27. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　② 550　③ 1100　④ 1150　⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7i}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(385+385)=385$$

28. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$ ② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$ ③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$ ⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로

$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

29. $\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5　② -7　③ -8　④ -79　⑤ -80

해설

$\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$
$=\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{80}-\sqrt{81}$
$=\sqrt{1}-\sqrt{81}$
$=1-9=-8$

30. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$ ② $\dfrac{n}{n+1}$ ③ $\dfrac{2n}{n+1}$

④ $\dfrac{2n}{2n+1}$ ⑤ $\dfrac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

31. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_9$ ② $a_{20}-a_{10}$ ③ $a_{21}-a_9$

④ $a_{21}-a_{10}$ ⑤ $a_{21}-a_{11}$

해설

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ 이므로

$a_{21} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20}$

$b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20}$

$= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots b_9)$

$= a_{21} - a_{10}$

32. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 5$

$\therefore\ a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$

33. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

> (i) $P(\boxed{(가)})$이 참이다.
> (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(가)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k ② 0, $k+1$ ③ 0, $k-1$
④ 1, k ⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{\ 1\ })$이 참이다.

(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{k+1})$도 참이다.

34. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 - n$으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

(i) $n \geq 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= 2n - 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$

(i), (ii)에서 $a_n = 2n - 2 \ (n \geq 1)$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 - 2 = 18$

35. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

① 124 ② 132 ③ 145 ④ 155 ⑤ 162

해설

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 5$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 30$$

$r^{10}+1 = 6$이므로 $r^{10} = 5$

$$S_{30} = \frac{a(r^{30}-1)}{r-1}$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$이므로

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 5 \cdot (r^{20}+r^{10}+1) \\ &= 5 \cdot (5^2+5+1) \\ &= 5 \cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

36. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_n = 2 \cdot 3^n + k$이다. 이때, 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되도록 하는 상수 k의 값과 수열 $\{a_n\}$의 일반항은?

① $k = -1,\ a_n = 4 \cdot 3^n$

② $k = -1,\ a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

③ $k = -1,\ a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

④ $k = -2,\ a_n = 4 \cdot 3^n$

⑤ $k = -2,\ a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

해설

(i) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2 \cdot 3^{n-1} + k = 6 + k$

(ii) $n = 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1} = (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k)$

$= 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$

따라서 수열 $a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$는 공비가 3인 등비수열이다.

(i), (ii)로부터 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되려면

$6 + k,\ 4 \cdot 3,\ 4 \cdot 3^2,\ 4 \cdot 3^3, \cdots$ 이 등비수열이 되어야 하므로

$6 + k = 4 \cdot 1 \quad \therefore\ k = -2$

따라서 $k = -2,\ a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

37. 등차수열 2, 5, 8, $\cdots$, 68 의 합을 기호 $\sum$를 써서 나타내면 $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$ 이다. 이때 상수 a, b, n의 합 $a+b+n$의 값은? (단,n은 자연수이다.)

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

해설

주어진 등차수열은 첫째항이 2, 공차가 3 이므로 일반항 a_n 은

$a_n = 2+(n-1)\cdot 3 = 3n-1$

이때, $3n-1=68$ 에서

$3n = 69 \quad \therefore n = 23$

즉, $2+5+8+\cdots+68 = \sum_{k=1}^{23}(3k-1)$

$\therefore a = 3,\ b = -1,\ n = 23$

$\therefore a+b+n = 3-1+23 = 25$

38. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2n^2 - n + 3$인 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}$의 값은?

① 82　② 84　③ 86　④ 88　⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$이므로

$$
\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= 2n^2 - n + 3 - \left\{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\right\} \\
&= 4n - 3 \ (n \geq 2)
\end{aligned}
$$

$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$

$$
\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\
&= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88
\end{aligned}
$$

39. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^3 - n$인 수열 $\{a_n\}$에서 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$의 값은?

① $\frac{17}{19}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{19}{40}$ ④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{19}{60}$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - n) - \left\{(n-1)^3 - (n-1)\right\} = 3n(n-1)(n \geq 2)$

$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) (n \geq 2)$

$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$

$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{19}{60}$

40. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{20}의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$　② $2 \cdot 3^{19} + 1$　③ $2 \cdot 3^{20} - 1$
④ $2 \cdot 3^{20} + 1$　⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$꼴로 변형한다.
$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면
$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$에서
$-2\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = -1$
즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$
따라서 수열 $\{a_n + 1\}$은
첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$이고 공비가 3인 등비수열이므로
$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$
$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$
$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

41. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_2 = 4$이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족할 때, a_{100}의 값을 구하면?

① 2^{10} ② 2^{20} ③ 2^{40} ④ 2^{80} ⑤ 2^{100}

해설

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 2b_n$

이때, 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$a_n = 2^n$

$\therefore\ a_{100} = 2^{100}$

42. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의될 때, a_{15}의 값은?

① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{29}$ ④ $\frac{1}{31}$ ⑤ $\frac{1}{39}$

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ 에서 양변에 역수를 취하면 $\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ 이라 두면 $b_{n+1} = b_n + 2,\ b_1 = 3$

따라서, $b_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{2n+1}$

$\therefore\ a_{15} = \frac{1}{31}$

43. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$
$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$
② $2k,\ k+1$
③ $2k,\ (k+1)^2$
④ $2k+1,\ k+1$
⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

해설

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$
$=k^2+\boxed{2k+1}=\boxed{(k+1)^2}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ (가)$=2k+1$, (나)$=(k+1)^2$

44. 매년 초 100만원을 연이율 5%로 은행에 적금할 때, 10년 후의 원리합계는? (단, 이자는 1년마다 복리로 계산하고, $1.05^{10} = 1.63$)

① 163만원 ② 1050만원 ③ 1230만원

④ 1323만원 ⑤ 1630만원

해설

원리합계 S는

$$S = 100(1+0.05) + 100(1+0.05)^2 + \cdots + 10(1+0.05)^{10}$$

$$= \frac{100 \times 1.05(1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$= \frac{105(1.05^{10} - 1)}{0.05} = \frac{105(1.63 - 1)}{0.05}$$

$$= \frac{105 \times 0.63}{0.05} = 1323(\text{만원})$$

45. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$일 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

㉠ $a_3 = 36$

㉡ $\{a_n\}$은 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$은 등차수열이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 4$이므로

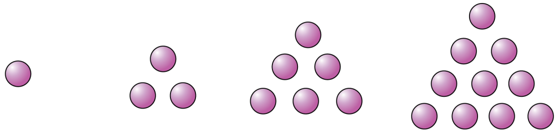
$a_n = (2 \cdot 3^n - 2) - (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$

㉠ $a_3 = 36$

㉡ $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$은 첫째항이 $\log_{10} 4$, 공차가 $\log_{10} 3$인 등차수열이다.

46. 다음 그림과 같이 규칙적인 구슬의 개수를 증가시키면서 정삼각형의 모양을 만들 때, 필요한 구슬의 개수를 삼각수라고 한다. 이 삼각수들의 수열을 a_1, a_2, $a_3, \cdots$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?



$a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $a_3 = 6$ $a_4 = 10$

① 1500 ② 1510 ③ 1520 ④ 1530 ⑤ 1540

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 6,\ 10, \cdots$

$\{b_n\} :\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$

계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 1인 등차수열이므로

$b_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n + 1$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$

$$= 1 + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20} \frac{k^2+k}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2}\right) \\ &= 1540 \end{aligned}$$

47. 수열 a_n 을 다음과 같이 정의한다.

$a_n = 10^{n-1} + 10^{-n}$(단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라고 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} b_k = \dfrac{1}{㉠}\{10^{㉡} + 10^{㉢} + ㉣\}$ 이다.

이때, ㉠+ ㉡+ ㉢+ ㉣의 값은?

① 29 ② 69 ③ 71 ④ 93 ⑤ 111

해설

$b_n = \sum_{k=1}^{n}(10^{k-1} + 10^{-k})$

$$= \frac{10^n - 1}{10 - 1} + \frac{\frac{1}{10}\left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{9}\left\{10^n - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$$

즉, $b_n = \dfrac{10^n - 10^{-n}}{9}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{10}(10^k - 10^{-k})$$

$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} - \frac{\frac{1}{10}(1 - 10^{-10})}{1 - \frac{1}{10}}\right\} = \frac{1}{81}(10^{11} + 10^{-10} - 11)$$

$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ + ㉣ $= 81 + 11 - 10 - 11 = 71$

48. 다음과 같이 나열된 55개의 수를 모두 더하면?

$$
\begin{array}{cccccc}
1^2 \\
1^2 & 1^2 \\
1^2 & 2^2 & 3^2 \\
1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 10^2
\end{array}
$$

① 1210 ② 1230 ③ 1250 ④ 1270 ⑤ 1290

해설

n번째 행의 수의 합은

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

따라서, 제 1행에서 제 10행까지의 모든 수의 합은

$\sum_{n=1}^{10} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{10} 2n^3 + \sum_{n=1}^{10} 3n^2 + \sum_{n=1}^{10} n\right)$

$= \dfrac{1}{6}\left\{2\left(\dfrac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \dfrac{10 \cdot 11}{2}\right\}$

$= 1210$

49. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3, \cdots)$을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{11}{4}$ ③ $\dfrac{13}{4}$ ④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ $\dfrac{17}{4}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{1\cdot 3}{2^2}a_1$$

$$a_3 = \frac{2\cdot 4}{3^2}a_2$$

$$a_4 = \frac{3\cdot 5}{4^2}a_3$$

$$\vdots$$

$$\times)\ a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}a_{n-1}$$

$\therefore\ a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$

$$= \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{2n}\cdot a_1$$

$a_1 = 5$를 대입하면 $a_n = \dfrac{5(n+1)}{2n}$

$$\therefore a_{10} = \frac{5\cdot 11}{2\cdot 10} = \frac{11}{4}$$

50. 시험관 A에는 $a\%$의 알콜 6g, 시험관 B에는 $b\%$의 알콜 4g 들어있다. 두 시험관에서 A, B에서 각각 1g씩 꺼내어 바꾸어 넣는 시행을 n회 실시한 후 A, B에 들어있는 알콜의 농도를 각각 $a\%, b\%$라 하면 다음이 성립한다. 이때, $p-q+r-s$의 값은?

$$a_{n+1} = pa_n + qb_n,\ b_{n+1} = ra_n + sb_n$$

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1}\%$는 $a_n\%$ 5g안에 들어있는 알콜과 $b_n\%$ 1g안에 들어있는 알콜을 합한 전체 6g의 농도이므로

$$a_{n+1} = \frac{\frac{a_n}{100}\times 5 + \frac{b_n}{100}\times 1}{6}\times 100 = \frac{5a_n + b_n}{6}$$

같은 방법으로

$$b_{n+1} = \frac{\frac{a_n}{100}\times 1 + \frac{b_n}{100}\times 3}{4}\times 100 = \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

$$p = \frac{5}{6},\ q = \frac{1}{6},\ r = \frac{1}{4},\ s = \frac{3}{4}$$

$$\therefore\ p-q+r-s = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$$