1. 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 100 이하인 자연수의 모임
② 우리 반에서 키가 제일 작은 학생들의 모임
③ 3 의 배수의 모임
④ 노래를 잘하는 학생들의 모임
⑤ 우리 학교 학급 반장들의 모임

해설
노래를 잘한다는 것 만으로는 대상을 분명히 알 수 없다.

2. 2보다 크고 10보다 작은 짝수의 집합을 A라 할 때, 다음 $\square$ 안에 들어갈 기호가 $\in$인 것을 골라라.

① $2 \square A$　② $A \square 4$　③ $6 \square A$

④ $A \square 10$　⑤ $\{4,\ 6\} \square A$

해설

$A = \{4,\ 6,\ 8\}$

① $2 \notin A$

② $A \ni 4$

③ $6 \in A$

④ $A \not\ni 10$

⑤ $\{4,\ 6\} \subset A$

3. 다음 중 공집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{0\}$　② $\varnothing$

③ $\left\{x \mid x \le 2\text{인 짝수}\right\}$　④ $\left\{x \mid 1 < x < 2\text{인 자연수}\right\}$

⑤ $\{\varnothing\}$

해설

③ $\left\{x \mid x \le 2\text{인 짝수}\right\} = \{2\}$

④ 1 과 2 사이에는 자연수가 없으므로 $\left\{x \mid 1 < x < 2\text{인 자연수}\right\} = \varnothing$

4. $A = \{\phi,\ x,\ \{x,\ y\}\}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\phi \subset A$ ② $\{\phi\} \subset A$ ③ $\{x,\ y\} \subset A$
④ $\{x,\ y\} \in A$ ⑤ $x \in A$

해설
③ $\{x,\ y\}$는 A의 원소이다.
$\therefore \{x,\ y\} \in A$

5. 두 집합 $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $B \subset A$

② $n(A) = 3$

③ $n(B) = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

④ $n\{B\} + n\{A\} = 6$

⑤ $A \not\subset B$

해설

① $B \not\subset A$
② $n(A) = 2$
③ $n(B) = 4$
⑤ $A \subset B$

6. 다음 중 옳은 것은?

① $0 \subset \{\varnothing\}$

② $\{x,\ y\} \not\subset \{y,\ x\}$

③ $\{a,\ b\} \subset \{a,\ b,\ c\}$

④ $\{\varnothing\} \subset \{2,\ 4,\ 6\}$

⑤ $\{1,\ 3,\ 5\} \subset \{1,\ 3,\ 4,\ 7\}$

해설

① $0 \not\subset \{\varnothing\}$

② $\{x,\ y\} = \{y,\ x\}$

④ $\{\varnothing\} \not\subset \{2,\ 4,\ 6\}$

⑤ $\{1,\ 3,\ 5\} \not\subset \{1,\ 3,\ 4,\ 7\}$

7. 다음 중 부분집합의 개수가 32 개인 집합이 아닌 것은?

① $\{x \mid x$는 16의 약수$\}$

② $\{x \mid x$는 6보다 작은 자연수$\}$

③ $\{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$

④ $\{$선예, 유빈, 소희, 선미, 예은$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 20 이하의 4의 배수$\}$

해설

① $2^5 = 32$ (개)
② $2^5 = 32$ (개)
③ $2^4 = 16$ (개)
④ $2^5 = 32$ (개)
⑤ $2^5 = 32$ (개)

8. 두 집합 $A=\{6,\ 12\}$, $B=\{12,\ a\}$ 가 서로 같을 때, a 의 값으로 옳은 것은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두 집합 A, B 가 서로 같으므로 $\{6,\ 12\}=\{12,\ a\}$
따라서 $6=a$

9. 두 집합 A, B가 다음의 관계를 만족할 때, 집합 B로 가능한 것은?

A	B	$A \cup B$
$\{a, e\}$		$\{a, e, i, o, u\}$

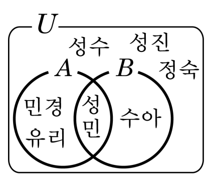
① $\{i, o\}$ ② $\{i, o, u\}$ ③ $\{a, e, i\}$

④ $\{a, i, u\}$ ⑤ $\{a, o, u\}$

해설

$A = \{a, e\}$, $A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$이므로 $\{i, o, u\} \subset B \subset \{a, e, i, o, u\}$이다.

10. 아래 벤 다이어그램에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?



① $U = \{$성수, 유리, 민경, 성민, 수아, 성진, 정숙$\}$

② $B^c = \{$유리 , 민경 , 성수 , 성진 , 정숙$\}$

③ $A - B = \{$유리 , 민경$\}$

④ $B - A = \{$수아 , 성민$\}$

⑤ $(A \cup B)^c = \{$성수, 성진, 정숙$\}$

해설

④ $B - A = \{$수아$\}$

11. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

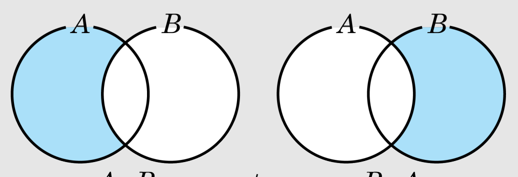
① $A \cap \varnothing = \varnothing$ ② $A \cup \varnothing = A$

③ $A^c = U - A$ ④ $A - B = A - (A \cap B)$

⑤ $A - B = B - A$

해설

⑤ 벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



$A-B \quad \neq \quad B-A$

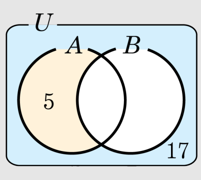
$\therefore\ A - B \neq B - A$

12. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 35$, $n(A - B) = 5$, $n(A^c \cap B^c) = 17$ 일 때, $n(B)$ 는?

① 10　　② 12　　③ 13　　④ 18　　⑤ 30

해설

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 17$
벤다이어그램을 그려보면



$n(B) = 35 - (17 + 5) = 13$

$\therefore\ n(B) = 13$

13. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 모두 고르면?

① $2 < \sqrt{6} \leq 3$
② 2는 소수가 아니다.
③ $2 > 3$ 또는 $3 \leq 5$
④ $2 \leq \sqrt{3} < 3$
⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7\cdots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

14. 명제 'p 이면 q 가 아니다.' 의 역인 명제의 대우를 구하면?

① q 가 아니면 p 이다.
② q 이면 p 가 아니다.
③ p 가 아니면 q 가 아니다.
④ p 가 아니면 q 이다.
⑤ q 이면 p 이다.

해설

$p \to \sim q \Rightarrow \sim q \to p \Rightarrow \sim p \to q \Rightarrow p$가 아니면 q 이다.

15. $a>0,\ b>0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$　② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$　④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2(a+b)-(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$
$=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$
(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)
따라서 $\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

16. 세 집합

$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$,

$B=\left\{x \mid x\text{는 } 20 \text{ 이하의 소수}\right\}$,

$C=\left\{x \mid x\text{는 } 15\text{의 약수}\right\}$ 일 때,

$n(A)+n(B)+n(C)$ 의 값을 구하여라.

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

해설

$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

$C=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

$\therefore\ n(A)+n(B)+n(C)=5+8+4=17$

17. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \left\{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\right\}$, $C = \left\{x \mid x\text{는 6의 양의 약수}\right\}$ 일 때, 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $A \subset B \subset C$　　② $B \subset A \subset C$　　③ $B \subset C \subset A$

④ $C \subset A \subset B$　　⑤ $C \subset B \subset A$

해설

$x^2 - 4x + 3 = 0$ 에서 $(x-1)(x-3) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 3$

따라서 $B = \{1,\ 3\}$ 이고, $C = \{1, 2, 3, 6\}$

따라서 집합 A, B, C 의 포함 관계는 $B \subset A \subset C$ 이다.

18. 집합 $A = \{x \mid 1 \le x \le 10,\ x$는 자연수$\}$의 부분집합 중에서 홀수는 반드시 포함하고, 4의 배수는 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 4개　② 8개　③ 16개　④ 32개　⑤ 64개

해설

$2^{10-5-2} = 2^3 = 8$(개)

19. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $A = \varnothing$ 이면 집합 A 의 원소의 개수는 0 개 이다.

② 집합 A 의 원소의 개수보다 집합 B 의 원소의 개수가 많으면 $A \subset B$ 이다.

③ $A \subset B$ 이면 집합 B 의 원소의 개수가 집합 A 의 원소의 개수보다 많다.

④ $A = \{x \mid x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 이면 $n(A) = 4$ 이다.

⑤ $n(\{1,\ 2,\ 4\}) - n(\{2,\ 4,\ 6\}) = 0$ 이다.

해설

② 반례 : $\{1\} \not\subset \{2,\ 3\}$

③ 반례 : $\{1,\ 2\} \subset \{1,\ 2\}$, $n(\{1,\ 2\}) = n(\{1,\ 2\})$

④ $A = \{x \mid x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 이면 $n(A) = 3$ 이다.

20. 집합 $A = \{6, 12, 18, \cdots\}$, $B = \{12, 24, 36, \cdots\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은?

① $\varnothing$
② $\{x \mid x$는 4의 배수$\}$
③ $\{x \mid x$는 8의 배수$\}$
④ $\{x \mid x$는 8의 약수$\}$
⑤ $\{x \mid x$는 12의 배수$\}$

해설

$A \cap B$ 은 집합 A 에도 속하고 B 에도 속하는 집합을 의미한다.
$A \cap B = \{12, 24, 36, \cdots\}$ 이므로
조건제시법으로 고쳐보면
$A \cap B = \{x \mid x$는 12 의 배수$\}$가 된다.

21. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup \varnothing = \varnothing$　　② $A \cap \varnothing = \varnothing$

③ $(A \cap B) \subset A$　　④ $B \subset (A \cup B)$

⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

해설

① $A \cup \varnothing = A$

22. 세 집합 A, B, X 에 대하여 $X \cap (A \cup B) = X$ 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $X \subset A$ ② $X \subset (A \cap B)$ ③ $X \subset (A \cup B)$
④ $(A \cup B) \subset X$ ⑤ $(A \cap B) \subset X$

해설

$X \cap (A \cup B) = X$ 는 $X \subset (A \cup B)$를 의미한다.
① $X \subset A$ 는 알 수 없다.
② $X \subset (A \cap B)$ 는 알 수 없다.
④ $(A \cup B) \subset X$ 는 알 수 없다.
⑤ $(A \cap B) \subset X$ 는 알 수 없다.

23. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개　④ 16 개　⑤ 32 개

해설

$A \cup X = A$ 이면 $X \subset A$,
$(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$
$\therefore\ (A \cap B) \subset X \subset A$
$A \cap B = \{3,\ 4,\ 5\}$ 이므로 집합 X 는 3, 4, 5 를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

24. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A)=23$, $n(B)=12$, $n(A\cap B)=7$ 일 때, $n(A\cup B)$ 는?

① 35　　② 28　　③ 25　　④ 23　　⑤ 19

해설

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ &= 23+12-7=28 \end{aligned}$$

25. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 3\}$ 일 때, $A^c, A-B$ 는?

① $A^c=\{1\}$, $A-B=\{1,3\}$
② $A^c=\{1,3\}$, $A-B=\{2,4\}$
③ $A^c=\{2,4\}$, $A-B=\{1,5\}$
④ $A^c=\{3\}$, $A-B=\{1,5\}$
⑤ $A^c=\{2,4\}$, $A-B=\{1,3\}$

해설

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 이므로 $A^c=\{2,4\}$ 이고 $A-B=\{1,5\}$ 이다.
따라서 ③이다.

26. $A=\{2,3,a+2\}$, $B=\{a-1,4\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{4\}$ 일 때, $B-A$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{4\}$ ④ $\{1,2\}$ ⑤ $\{1,5\}$

해설

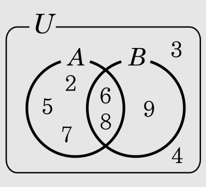
$A\cap B=\{4\}$ 이므로 $a+2=4$, $a=2$ 이다.
따라서 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{1,4\}$ 이므로 $B-A=\{1\}$ 이다.

27. $U = \{x | x\text{는 } 10\text{보다 작은 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{2, 5, 7\}, A \cap B = \{6, 8\}, A^c \cap B^c = \{1, 3, 4\}$ 일 때, 집합 B 는?

① $\{6, 8\}$　② $\{6, 9\}$　③ $\{6, 7, 8\}$
④ $\{6, 8, 9\}$　⑤ $\{6, 7, 8, 9\}$

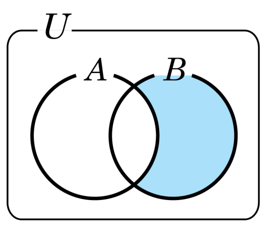
해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c = \{1, 3, 4\}$ 이므로



따라서 $B = \{6, 8, 9\}$ 이다.

28. 다음 벤 다이어그램의 빗금 친 부분을 표현한 것으로 옳은 것은?

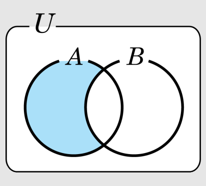


① $A-(A\cap B)$ ② $A\cap B^c$ ③ $A-B$

④ $(A\cup B)-B$ ⑤ A^c-B^c

해설

①, ②, ③, ④



29. $(A^c \cap B^c) \cup (A \cup B)$ 을 간단히 하면?

① A ② B ③ $\varnothing$ ④ U ⑤ $A \cap B$

해설

$(A^c \cap B^c) \cup (A \cup B) = (A \cup B)^c \cup (A \cup B)$
$= U$

30. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$
② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$
④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$
⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

31. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다. $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참

따라서 $Q \subset P$

32. a, b가 양수일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$

a, b가 양수이므로, $ab>0$

$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$

$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 5+4=9$

33. $x>3$일 때 $\frac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$

이 때, $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\frac{3}{x-3}>0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\frac{3}{x-3}}+11$

$=2\cdot 3+11=17$

(단, 등호는 $3(x-3)=\frac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

34. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)
p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.
$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

35. 다음 <보기> 의 조건 '$p(x)$ '를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

(1) $p(x)$: x는 12의 양의 약수이다.
$P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$
(2) $p(x)$: $x^2 + 1 = 0$
$P = \varnothing$
(3) $p(x)$: $x^2 - 5x - 4 = 0$
$P = \{1, 4\}$
(4) $p(x)$: $x^2 + 4x + 5 > 0$
$P = R$

① (1), (2)　② (2), (3)　③ (3), (4)
④ (2), (4)　⑤ (1), (3)

해설

(1) $p = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0 \therefore P = \varnothing$
(3) $P = \left\{\dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2}\right\}$
(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

36. 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+5 \geq k$ 이다.' 는 참이고 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 2$ 이다.' 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-5 \leq k < -2$　　② $-5 < k \leq -2$　　③ $-2 \leq k < 2$

④ $2 < k \leq 5$　　⑤ $2 \leq k < 5$

해설

부등식 $x^2 \geq k-5$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $k-5 \leq 0$ 이어야 한다.

$\therefore\ k \leq 5 \cdots$ ㉠

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 2$ 이다.' 가 거짓이므로 그 부정인 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+k > 2$ 이다.' 는 참이다.

따라서, $x^2 > 2-k$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $2-k < 0$ 이어야 한다.

$\therefore\ k > 2 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터 구하는 k 의 값의 범위는 $2 < k \leq 5$

37. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7　　② -6　　③ -5　　④ -4　　⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$는 $\sim q \rightarrow \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3$: $9 + 3a - 6 \leq 0 \ \rightarrow \ a \leq -1$

2) $x = 1$: $1 - a - 6 \leq 0 \ \rightarrow \ a \geq -5$

$\therefore \ -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

38. 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수임을 증명하는 과정이다. (1), (2), (3)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

[증명]
주어진 명제의 (1)을(를) 구하여 보면
(1) : 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'
이 때, n이 홀수이므로 n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$n =$ (2)(k는 0 또는 자연수)
이 때, n^2의 값을 구하면
$n^2 = (2)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$는 (3)이므로 n^2은 홀수이다.
따라서 (1)가(이) 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

① 역, $2k+1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k-1$, 홀수
③ 대우, $2k+1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k-1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k+1$, 0 또는 홀수

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구하여 보면
대우 : 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'
이 때, n이 홀수이므로 n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$n = 2k + 1$(k는 0 또는 자연수)
이 때, n^2의 값을 구하면
$n^2 = 2 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$는 0 또는 짝수이므로 n^2은 홀수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

39. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A=B$　　② $B\subset A$　　③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$　　⑤ $A^C=B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

40. 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건, r 은 s 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① q는 p 이기 위한 충분조건이다.

② r은 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p는 r이기 위한 필요충분조건이다.

④ r 은 s 이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ s 는 p이기 위한 필요충분조건이다.

해설

주어진 조건을 그림처럼 도식화 해보면 q, r, s는 서로 필요충분조건이고 p는 q, r, s이기 위한 충분조건이다.

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, Rightarrow] & q \arrow[r, Rightarrow] & r \arrow[dl, Rightarrow] \\ & s \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

∴ ④

41. $a > b > 0$인 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{1+a}$와 $\dfrac{b}{b+1}$의 대소 관계는?

① $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$　　② $\dfrac{a}{1+a} \le \dfrac{b}{1+b}$

③ $\dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$　　④ $\dfrac{a}{1+a} \ge \dfrac{b}{1+b}$

⑤ $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$

해설

$\dfrac{a}{1+a} - \dfrac{b}{1+b} = \dfrac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$

$= \dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$

$(\because a > b > 0)$

$\therefore \dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$

해설

$a > b > 0$이면 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

양변에 1을 더하면 $\dfrac{1+a}{a} < \dfrac{1+b}{b}$

$\therefore \dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$

42. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$　　㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. $\therefore$ 참

㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ $\therefore$ 거짓

㉢ [반례] $x = 0,\ y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ $\therefore$ 거짓

43. 제곱의 합이 일정한 두 실수 x, y에 대하여 $2x+3y$의 값이 최대일 때, x와 y사이의 관계는?

① $x=y$ ② $2x=3y$ ③ $3x=2y$

④ $x=y^2$ ⑤ $x^2=y^2$

해설

$x^2+y^2=k$라 하면

$(x^2+y^2)(2^2+3^2) \geq (2x+3y)^2$

($\because$코시-슈바르츠 부등식에 의하여)

$\therefore 13k \geq (2x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{13}k \leq 2x+3y \leq \sqrt{13}k$

이 때, 등호는 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$일 때 성립하므로

$3x=2y$

44. 두 집합 X, Y 에 대하여 기호 $\bigotimes$ 를 $X \bigotimes Y = \{x \times y | x \in X \text{ 그리고 } y \in Y\}$ 라고 약속한다.
$A = \{0,\ 1,\ 2\}$, $B = \{1,\ 2\}$ 일 때, $A \bigotimes B$ 를 구하면?

① $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ ② $\{0,\ 1,\ 2\}$ ③ $\{0,\ 1\}$
④ $\{0\}$ ⑤ $\{1, 2\}$

해설

$A \bigotimes B$
$= \{0 \times 1,\ 0 \times 2,\ 1 \times 1, 1 \times 2,\ 2 \times 1,\ 2 \times 2\}$
$= \{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$

45. 두 집합 $A=\{x|1\le x\le 5\}$, $B=\{x|3<x<7\}$에 대하여 $A\cap X=X$, $(A-B)\cup X=X$를 만족시키는 집합 X를 $X=\{x|p\le x\le q\}$라 할 때, q의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

① 1, 3　② 1, 5　③ 1, 7　④ 3, 5　⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X\subset A$, $(A-B)\subset X$ 즉, $\{x|1\le x\le 3\}\subset X\subset\{x|1\le x\le 5\}$

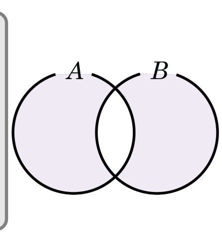
$X=\{x|p\le x\le q\}$ 에서 $p=1$, $3\le q\le 5$

46. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를 $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$로 정의할 때, 다음 중에서 $(A \triangle B) \triangle A$와 같은 집합은?

① A　② B　③ $A \cap B$　④ $A \cup B$　⑤ $A - B$

해설

$A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $(A \triangle B) \triangle A = [(A \triangle B)-A] \cup [A-(A \triangle B)] = (B-A) \cup (A \cap B) = B$



47. (가) 고등학교 1 학년 630 명을 대상으로 경주와 제주도를 관광한 적이 있는지를 조사하였더니 경주를 관광한 학생은 400 명, 제주도를 관광한 학생은 330 명이였다. 이 때, 경주와 제주도를 모두 관광한 학생은 최소 m 명이고 최대 M 명이다. $m+M$ 의 값은?

① 200 명　② 330 명　③ 430 명
④ 500 명　⑤ 530 명

해설

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=730-n(A\cup B)\cdots\cdots$ ㉠

i) $n(A\cap B)$ 가 최대일 경우 $\rightarrow$ 제주도를 관광한 학생이 모두 경주를 관광할 때 최대이다.

$\therefore n(A\cap B)=330\cdots\cdots(M)$

ii) $n(A\cap B)$ 가 최소인 경우 $\rightarrow$
㉠에서 $n(A\cup B)$ 가 최대일 때이다.

$\therefore n(A\cup B)=n(U)=630$

$\Rightarrow n(A\cap B)=100\cdots\cdots(m)$

$M+m=330+100=430$

48. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ p : $|a|+|b|=0$ q : $ab=0$

㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ q : $(a-b)^2+(b-c)^2=0$

㉢ $p : 0<x<y$ $q : x^2<y^2$

㉣ $p : x<y$ $q : [x]<[y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ p : $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$이고 $b=0$ q : $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \not\Leftarrow q$ 이므로 만족
㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ $a=b$ 또는 $b=c$ q : $a=b$ 그리고 $b=c$ $\therefore p \not\Rightarrow q$이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.
㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because x, y$ 모두 양수) $p \not\Leftarrow q$ ($\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족
㉣ $p \not\Rightarrow q$ ($\because x=1, y=1.5$ 일 때 $[1]=[1.5]=1$일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

49. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가? (단 x, y는 실수이다.)

㉠ p : $-1 < x < 1$ q : $x < 3$

㉡ p : $|x-1| = 2$ q : $x^2 - 2x + 3 = 0$

㉢ p : $x^2 + y^2 = 0$ q : $xy = 0$

㉣ $p : A^c \cup B = U$ $q : A \subset B$

㉤ $p : |x| = 1$ $q : x = 1$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ p는 q이기 위한 충분조건만 된다.
㉡ p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.
㉢ p는 q이기 위한 충분조건만 된다.
㉣ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
즉, $A^c \cup B = U$와 $A \subset B$은 동치이다.
㉤ p는 q이기 위한 필요조건만 된다.
$\therefore$ 1개

50. 두 조건 $p : a-4 < x \le a+5$, $q : |x| \le 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 $q : -1 \le x \le 1$ 에서 $a+5 \ge 1$, $a-4 < -1$

따라서 $a \ge -4$, $a < 3$ 이다.

즉, $-4 \le a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.