1. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$ (나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$

④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

2. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$

$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$

$\therefore\ a+b=-10$

3. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2 ② $-1+\sqrt{2}$, -3 ③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로

$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha = 5,\quad \alpha = 3$

$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

4. 삼차방정식 $x^3-4x^2+x+k=0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x=-1$을 대입하면

$(-1)^3-4-1+k=0 \quad \therefore k=6$

$x^3-4x^2+x+6=0$의 나머지 두 근을 α, β라 하면

세 근의 합 $4=-1+\alpha+\beta$에서 $\alpha+\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=11$

5. x에 관한 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-4$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-3+2+4=4$

6. 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$이므로

켤레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해

$-1=(1-i)+(1+i)+\alpha \therefore \alpha=-3$

$p=(1-i)(1+i)-3(1-i)-3(1+i)$

$\therefore p=-4$

$-q=(1-i)(1+i)\cdot(-3)=-6$

$\therefore q=6$

$\therefore \ p+q=-4+6=2$

7. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5$, $5\alpha = 5$

$\alpha = 1$

$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$

$a = -3$

$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$

$\therefore\ a + b = 4$

8. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.

주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면

$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \quad \cdots\cdots ㉠$

$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \cdots\cdots ㉡$

$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

9. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 한근이 $2 - \sqrt{3}$일 때, $\dfrac{c-b}{a}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

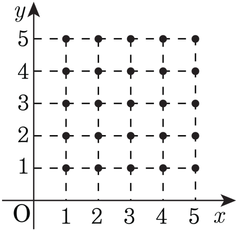
계수가 유리수인 이차방정식에서 $2 - \sqrt{3}$이 근이면 $2 + \sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{b}{a} = \left(2 + \sqrt{3}\right) + \left(2 - \sqrt{3}\right) = 4$

$\dfrac{c}{a} = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 1$

$\therefore \dfrac{c-b}{a} = \dfrac{c}{a} + \left(-\dfrac{b}{a}\right) = 1 + 4 = 5$

10. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?



① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개

④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$$xy+x-2y-2 = x(y+1)-2(y+1)$$
$$= (x-2)(y+1) \text{ 이므로}$$

$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는

ⅰ) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$

ⅱ) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$

ⅲ) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$

ⅳ) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,

$x=-1,\ y=-2$

$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

11. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$

$(x-3)(y+2)=4$

$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x-3=1,\ y+2=4$

$\therefore\ \ x=4,\ y=2$

12. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$, $\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$
조건에서 x, y가 양의 정수이므로
$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

13. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)

$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$

이 두 식에서 a를 소거하면

$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$

$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로

$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$

$\therefore\ a = 6,\ -2$

14. 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+4=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값을 구하면?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ -1 ④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-4$

$\beta+\gamma=-2-\alpha,\ \gamma+\alpha=-2-\beta,\ \alpha+\beta=-2-\gamma$를 이용하면

(주어진 식)$=\dfrac{-2-\alpha}{\alpha}+\dfrac{-2-\beta}{\beta}+\dfrac{-2-\gamma}{\gamma}$

$=-2\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)-3$

$=-2\left(\dfrac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)-3=-\dfrac{3}{2}$

15. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma,\ \beta + \gamma = 2 - \alpha,\ \gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore\ k = 4$

16. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$ ② $x^7 + y^7 = 1$ ③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$ ⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\therefore\ x^3 = y^3 = -1,\ x + y = 1,\ xy = 1$

① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$

② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$

③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$

④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$

⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$

17. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{21}$ (단, $x<y$)을 만족하는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하면?

① 484　② 192　③ 112　④ 100　⑤ 548

해설

$21(x+y)=xy,\quad xy-21(x+y)=0$

$\therefore\ (x-21)(y-21)=21^2=3^2\times 7^2$

$21x=(x-21)y$이고 $y>x>0$이므로

$y-21>x-21>0$

$\therefore (x-21,\ y-21)$

$=(1,\ 441),\ (3,\ 147),\ (7,\ 63),\ (9,\ 49)$

$\therefore (x,\ y)$

$=(22,\ 462),\ (24,\ 168),\ (28,\ 84),\ (30,\ 70)$

$\therefore\ x+y$의 최댓값은 $22+462=484$

18. x, y가 정수일 때 방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 6 개

해설

$xy-x-2y-2+4=4$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=4$

따라서

$x-2=1,\ y-1=4$일 때, $x=3,\ y=5$

$x-2=2,\ y-1=2$일 때, $x=4,\ y=3$

$x-2=4,\ y-1=1$일 때, $x=6,\ y=2$

$x-2=-1,\ y-1=-4$일 때, $x=1,\ y=-3$

$x-2=4,\ y-1=-1$일 때, $x=6,\ y=0$

$x-2=1,\ y-1=4$일 때, $x=3,\ y=5$

따라서 순서쌍은 $(3,\ 5)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(1,\ -3)$, $(6,\ 0)$, $(3,\ 5)$로 모두 6개이다.

19. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수 x, y의 값이 <u>아닌</u> 것은?

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$$

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$ 의 양변에 xy 를 곱하면

$2y+3x=xy$, $xy-3x-2y=0$

$\therefore\ (x-2)(y-3)=6$

이 때, x, y 는 양의 정수이므로

$x-2\geq -1$, $y-3\geq -2$ 인 정수이다.

따라서, $x-1$, $y-3$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x-2$	1	2	3	6
$y-3$	6	3	2	1

그러므로 구하는 x, y 의 값은 $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$

20. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha+\beta=1-m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta=m+1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ (α, β는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

21. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots ① \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore \ (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

22. x 에 대한 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$ 의 두 근이 모두 정수 일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$x^2-kx+k+3=0$ 의 두 근을 α,β 라 하자

$\alpha+\beta=k, \alpha\beta=k+3 \rightarrow \ \alpha+\beta+3=\alpha\beta$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=3$

$(\alpha-1)(\beta-1)=4$ α,β 는 정수이므로

$1\times4 \Rightarrow \alpha=2,\ \beta=5, \quad k=7$

$2\times2 \Rightarrow \alpha=3, \beta=3, \quad k=6$

$-1\times-4 \Rightarrow \alpha=0, \beta=-3, \quad k=-3$

$-2\times-2 \Rightarrow \alpha=-1, \beta=-1, \quad k=-2$

$\therefore\ 7+6-3-2=8$