

1. 다음 ()안에 알맞은 것은?

$\frac{3}{2}i, \frac{5}{4}i, (\quad), \frac{9}{8}i, \frac{11}{10}i, \cdots$

- ① $\frac{5}{4}i$
- ② i
- ③ $\frac{7}{6}i$
- ④ $\frac{8}{6}i$
- ⑤ $\frac{6}{7}i$

해설

나열된 복소수의 분모의 수열을 a_n 이라 하면 $a_n = 2n$
분자의 수열을 b_n 이라 하면 $b_n = (2n + 1)i$ 이다.
따라서 구하는 세 번째의 복소수는 $\frac{7}{6}i$ 이다.

2. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_4 : a_9 = 2 : 5$ 일 때, a_{15} 의 값은?

① 40

② 43

③ 46

④ 49

⑤ 52

해설

첫째항을 a 라 하면 $a_n = a + (n - 1) \cdot 3$ 이므로

$$a_4 = a + 9, a_9 = a + 24$$

이때, $(a + 9) : (a + 24) = 2 : 5$ 에서

$$5(a + 9) = 2(a + 24)$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore a_{15} = 1 + (15 - 1) \cdot 3 = 43$$

3. 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, α, β 의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6$ 이므로 α, β 의 등차중항은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

4. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항

② 제 10 항

③ 제 11 항

④ 제 12 항

⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

5. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은? (단, 공비는 실수)

① 3^9

② $2 \cdot 3^9$

③ 3^{10}

④ $2 \cdot 3^{10}$

⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_5 = ar^4 = 162 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = 2, r = 3$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n

은

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$$

6. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

7. 수열 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \cdots + x^{2n-1}$ 의 합은? (단, $x \neq 1$)

① $2n$

② $\frac{x^{2n}}{x-1}$

③ $\frac{x^{2n}-1}{x-1}$

④ $\frac{x^{2n}-1}{x}$

⑤ $\frac{x^{2n}+1}{x-1}$

해설

첫째항이 1, 공비가 x , 항수가 $2n$ 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{1 \cdot (x^{2n} - 1)}{x - 1} = \frac{x^{2n} - 1}{x - 1}$$

8. $\sum_{k=1}^n a_k = A$, $\sum_{k=1}^n b_k = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = A + B$

② $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = A - B$

③ $\sum_{k=1}^n ca_k = cA$ (단, c 는 상수)

④ $\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = B - 1$

⑤ $\sum_{k=1}^n (a_k + c) = A + cn$ (단, c 는 상수)

해설

$\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = \sum_{k=1}^n b_k = B$
따라서, ④가 옳지 않다.

9. 16의 네제곱근 중 실수인 것의 곱을 P , 27의 세제곱근 중 허수인 것의 합을 Q 라 할 때, $P \times Q$ 의 값은?

- ① -36 ② -12 ③ 4 ④ 12 ⑤ 36

해설

$x^4 = 16, x^3 = -27$ 을 만족하는 x 를 구한다.
16의 네제곱근 중 실수인 것은
 $\sqrt[4]{16} = 2, -\sqrt[4]{16} = -2$
 $\therefore P = -4$
-27의 세제곱근을 X 라 하면
 $x^3 = -27, (x+3) + (x^2 - 3x + 9) = 0$
이때, -27의 세제곱근 중 허수인 것의 합은 방정식 $x^2 - 3x + 9 = 0$ 의 두근의 합과 같다.
 $\therefore Q = 3$
 $\therefore P \times Q = -12$

10. $x = 2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16

② 64

③ 256

④ 1024

⑤ 65536

해설

$$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$$

$$2^{10} = 1024, 2^6 = 64 \text{ 이므로}$$

$$\therefore 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$$

11. $a = \frac{4}{\sqrt{2}}, b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ 일 때, $\sqrt[6]{24}$ 를 a, b 로 나타낸 것은?

- ① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$ ④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

해설

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt[6]{24} &= \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{3} \\ &= \sqrt[3]{2}\sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

12. $\frac{1}{2} \log_2 3 + 5 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \log_2 3 + 5 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ &= \log_2 \sqrt{3} + \log_2 4 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{3} \times 4 \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ &= \log_2 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

13. $(\log_2 3 + 2 \log_4 7) \log_{\sqrt[4]{21}} 8$ 의 값은?

① 4

② 6

③ 12

④ $4 \log_2 3$

⑤ $6 \log_2 5$

해설

밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 한 후 계산한다.

$$\begin{aligned} & (\log_2 3 + 2 \log_4 7) \log_{\sqrt[4]{21}} 8 \\ &= \left(\log_2 3 + 2 \frac{\log_2 7}{\log_2 4} \right) \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt[4]{21}} \\ &= \left(\log_2 3 + 2 \frac{\log_2 7}{\log_2 2^2} \right) \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 21^{\frac{1}{4}}} \\ &= \left(\log_2 3 + 2 \frac{\log_2 7}{2 \log_2 2} \right) \cdot \frac{3 \log_2 2}{\frac{1}{4} \log_2 21} \\ &= (\log_2 3 + \log_2 7) \cdot \frac{12}{\log_2 21} \\ &= \log_2 21 \cdot \frac{12}{\log_2 21} = 12 \end{aligned}$$

14. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64} \\ &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12\end{aligned}$$

15. $5^a = 2$, $5^b = 3$ 이라 할 때, $\log_6 72$ 를 a 와 b 의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{a+b}{a-b}$
④ $\frac{2a+b}{a+b}$

② $\frac{2a+b}{b-a}$
⑤ $\frac{3a+2b}{a+b}$

③ $\frac{2a-b}{a+b}$

해설

$$a = \log_5 2, \quad b = \log_5 3$$

$$\log_6 72 = \frac{3 \log_5 2 + 2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a + 2b}{a + b}$$

16. $a_1 = 1$, $a_{10} = 37$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$ 이므로

$$(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$$

$$= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200$$

17. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $3 + 9 + \cdots + 3^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

㉡ $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + n \cdot 1 = \sum_{k=1}^n k(n-k)$

㉢ $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 10 \cdot 2^9 = \sum_{k=1}^{10} k \cdot 2^{k-1}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $3 + 9 + \cdots + 3^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ (거짓)

㉡. $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + n \cdot 1 = \sum_{k=1}^n k(n-k+1)$ (거짓)

㉢. 주어진 수열의 일반항은 $n \cdot 2^{n-1}$ 이므로
 $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 10 \cdot 2^9 = \sum_{k=1}^{10} k \cdot 2^{k-1}$ (참)

18. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^3 - n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\frac{1}{a_2} +$

$\frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$ 의 값은?

- ① $\frac{17}{19}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{19}{40}$ ④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{19}{60}$

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - n) - \{(n-1)^3 - (n-1)\} = 3n(n-1) \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{20} \right) = \frac{19}{60} \end{aligned}$$

19. 수열 2, 3, 5, 8, 12, ...에서 처음으로 200보다 커지는 항은?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면, 그 제차수열의 일반항 b_n 은 1, 2, 3, 4, ...

$$\therefore b_n = n$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 2 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} + 2$$

$$\text{따라서 } \frac{n^2 - n}{2} + 2 > 200 \text{ 에서 } n^2 - n = n(n-1) > 396$$

$$\text{이므로 } 19 \times 20 = 380, 20 \times 21 = 420 \text{ 에서 } n = 21$$

20. 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ 에서 제 20 항은?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ $\frac{5}{6}$
- ④ 1
- ⑤ $\frac{1}{7}$

해설

제1군 제2군 제3군 제5군
(1), $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots\right), \dots$

에서 제 1군부터 제 5군까지의 항수는

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

따라서, 제 20 항은 제 6군의 5 번째 항이므로

$\frac{5}{6}$ 이다.

21. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① $3 - 2^{12}$

② $3 - 2^{11}$

③ $3 - 2^{10}$

④ $3 - 2^9$

⑤ $3 - 2^8$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$ 의 양변에 -3 을 더하여 정리하면

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 - 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 3 - 2^9$$

22. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\log_3 a_n - 2 \log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족하고, $a_1 = 1, a_2 = 3$ 일 때, $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 18

해설

$\log_3 a_n - 2 \log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 에서

$$2 \log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + \log_3 a_{n+2}$$

$$\log_3 a_{n+1}^2 = \log_3 a_n a_{n+2}$$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3 \text{ 이므로 첫째항은 } 1 \text{ 이고, 공비는 } 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \text{ 이므로 } a_{10} = 3^9$$

$$\therefore \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9$$

23. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의될 때,

$a^{2014}a^{2015}a^{2016}$ 의 값은?

- ① -1
- ② 0
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 4

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = \frac{1}{2}, a_6 = -1, \dots$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, \frac{1}{2}, -1$ 이 반복되는 수열이고

$a^{2014}, a^{2015}, a^{2016}$ 은 연속한 세 항의 곱이므로

$2 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -1$

24. $2x = \log_7 2$ 일 때, $\frac{7^{3x} + 7^{-3x}}{7^x + 7^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{7}{3}$

해설

$$2x = \log_7 2 \text{ 에서 } 7^{2x} = 2$$

$$\text{따라서 } \frac{7^{3x} + 7^{-3x}}{7^x + 7^{-x}} = \frac{(7^{3x} + 7^{-3x}) \times 7^{3x}}{(7^x + 7^{-x}) \times 7^{3x}}$$

$$= \frac{7^{6x} + 1}{7^{4x} + 7^{2x}} = \frac{(7^{2x})^3 + 1}{(7^{2x})^2 + 7^{2x}}$$

$$= \frac{2^3 + 1}{2^2 + 2} = \frac{3}{2}$$

25. 양의 실수 A 에 대하여 상용로그 $\log \frac{1}{A}$ 의 정수 부분과 소수 부분이
이차방정식 $3x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 두 근일 때, $\log A$ 의 소수 부분은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

해설

상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 의미를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\log \frac{1}{A} = n + \alpha (n \text{은 정수}, 0 \leq \alpha < 1) \text{라 하면}$$

$$n + \alpha = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$\therefore n = 1, \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\log A = -\frac{5}{3} = -2 + \frac{1}{3}$$

따라서 $\log A$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{3}$ 이다.