

1. 지수법칙을 이용하여 $2^9 \times 5^5$ 은 몇 자리 수인지 구하여라.

▶ 답 : 자리 수

▷ 정답 : 일곱 자리 수

해설

$$2^9 \times 5^5 = 2^5 \cdot 2^4 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 \times 16 = 16 \times 10^5$$

따라서 일곱 자리의 수이다.

2. 다음 세 수의 크기를 비교하여 큰 순서대로 나열하여라.

$$2^{81}, 3^{63}, 5^{36}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3^{63}

▷ 정답 : 5^{36}

▷ 정답 : 2^{81}

해설

$81 = 3^4$, $63 = 3^2 \times 7$, $36 = 2^2 \times 3^2$ 이므로
세 수의 최대공약수는 $3^2 = 9$ 이다.

따라서

$$2^{81}, 3^{63}, 5^{36}$$

$(2^9)^9$, $(3^7)^9$, $(5^4)^9$ 에서

$$2^9 < 5^4 < 3^7 \text{ 이므로 세 수의 크기는 } 2^{81} < 5^{36} < 3^{63}$$

$$\therefore 3^{63}, 5^{36}, 2^{81}$$

3. 다음 중 계수가 가장 큰 것과 가장 작은 것을 차례로 나열하면?

㉠ $3a \times 2b$

㉡ $\left(\frac{1}{4}ab\right)^2 \times (2ab)^3$

㉢ $(-ab)^3 \times 2b$

㉣ $(-4x) \times (-3y)^2$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠ $6ab$

㉡ $\frac{a^5b^5}{2}$

㉢ $-2a^3b^4$

㉣ $-36xy^2$

4. 다음 보기 중 계산 결과가 옳은 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $x \times (-2x^2)^2 = 4x^5$

㉡ $(2x)^2 \times (3x)^2 = 12x^4$

㉢ $(-6xy^3) \times \frac{2}{3}x^2y = -4x^3y^4$

㉣ $-3^2x \times 4y = -36xy$

㉤ $\frac{2}{3}x^2yz \times \frac{3}{2}xyz^2 = x^3y^2z^3$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

㉡ $(2x)^2 \times (3x)^2 = 4x^2 \times 9x^2 = 36x^4$

5. 다음 보기 중 계산 결과가 옳은 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $6a^4 \div 3ab = \frac{2a^3}{b}$

㉡ $\frac{2}{3}x^2y \div \frac{1}{6}xy^2 = \frac{4x}{y}$

㉢ $(2x^2)^5 \div (-2x^3)^2 = 8x^4$

㉤ $(-2x^2y)^3 \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)^2 = 18x^4y$

㉥ $(-2x^3y)^3 \div (4xy^3)^2 = -\frac{x^7}{2y^3}$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 없다

해설

㉤ $(-2x^2y)^3 \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)^2 = -18x^4y$

6. $a \neq 0, b \neq 0$ 이고 x, y 가 자연수일 때, $a^{(x-1)}b^{(1-x)} \div b^{(x-1)}a^{(1-x)}$ 을 간단히 하면? (단, $x > y$)

① 2

② $\frac{a}{b}$

③ $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x-2}$

④ $\frac{b^{2x}}{a^2}$

⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^{2x+2}$

해설

$$\begin{aligned} a^{(x-1)}b^{(1-x)} \div b^{(x-1)}a^{(1-x)} &= a^{2x-2}b^{2-2x} \\ &= \frac{a^{2x-2}}{b^{2x-2}} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{2x-2} \end{aligned}$$

7. 정육면체의 부피가 $27a^6b^9$ 일 때, 한 모서리의 길이는?

- ① $3a^2b^3$ ② $9a^2b$ ③ $3a^3b^6$ ④ $6a^3b^3$ ⑤ $9a^3b^3$

해설

(정육면체의 부피) = (한 모서리의 길이) $\times$ (한 모서리의 길이) $\times$ (한 모서리의 길이) 이므로
 $27a^6b^9 = (3a^2b^3)^3$

8. $(-2x^4y)^2 \div (-x^3y^2)^3 \times \square = 8x$ 의 $\square$ 안에 알맞은 식을 구하라.

① $4x^2y^3$

② $4x^2y^4$

③ $-4x^2y^4$

④ $2x^4y^4$

⑤ $-2x^2y^4$

해설

$$4x^8y^2 \div (-x^3y^2)^3 \times \square = 8x$$

$$-\frac{4}{xy^4} \times \square = 8x$$

$$\square = -2x^2y^4$$

9. $\frac{2x^2 - 5x + 4}{3} - \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = ax^2 + bx + c$ 에서 $a + b + c$ 의 값은?

① $-\frac{1}{3}$

② $-\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2 - 5x + 4}{3} - \frac{x^2 + 2x + 1}{4} \\ &= \frac{4(2x^2 - 5x + 4)}{12} - \frac{3(x^2 + 2x + 1)}{12} \\ &= \frac{8x^2 - 20x + 16 - (3x^2 + 6x + 3)}{12} \\ &= \frac{5x^2 - 26x + 13}{12} \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c = \frac{5}{12} + \left(-\frac{26}{12}\right) + \frac{13}{12} = -\frac{2}{3}$$

10. $\frac{x}{6}(12x + 24) - \frac{x}{12}(36 - 12x) = Ax^2 + Bx$ 라 할 때, $A - B$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2x^2 + 4x - (3x - x^2) \\ &= 3x^2 + x = Ax^2 + Bx\end{aligned}$$

$$A = 3, B = 1$$

$$\therefore A - B = 2$$

11. 학생이는 $(x+2)(x-5)$ 를 전개하는데 -5 를 A 로 잘못 보아 $x^2 + 7x + B$ 로 전개하였다. 또, $(2x-1)(x+3)$ 을 전개하는데 x 의 계수 2 를 잘못 보아서 $Cx^2 - 7x - 3$ 으로 전개하였다. 이 때, $A + B + C$ 의 값은?

① 5

② 9

③ 13

④ 17

⑤ 21

해설

$$(x+2)(x+A) = x^2 + 7x + B \text{이므로}$$

$$A+2=7, 2A=B$$

$$\therefore A=5, B=10$$

x 의 계수를 잘못 보았기 때문에 그 수를 D 라 하면

$$(Dx-1)(x+3) = Cx^2 - 7x - 3 \text{이므로}$$

$$D=-2, C=-2$$

$$\therefore A+B+C=13$$

12. $\left(a - \frac{b}{2}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}a + 3b\right)\left(\frac{2}{3}a - 3b\right) = pa^2 + qb^2$ 에서 상수 p, q 에 대하여 $9p + 4q$ 의 값은?

① 5

② 29

③ 31

④ 35

⑤ 40

해설

$$\begin{aligned} & a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left\{ \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - (3b)^2 \right\} \\ &= a^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{4}{9}a^2 + 9b^2 \\ &= \frac{5}{9}a^2 + \frac{35}{4}b^2 \\ \therefore 9p + 4q &= 5 + 35 = 40 \end{aligned}$$

13. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{8xy - 3x^2}{2x^2y} \times (-4xy) - 8 \div \frac{xy}{2x^2y - xy^2}$$

① $-16x + 8y$

② $3x + 8y$

③ $-5x - 12y$

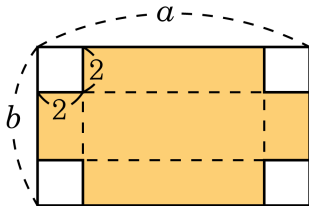
④ $-10x - 8y$

⑤ $4x - 9y$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{8xy - 3x^2}{2x^2y} \times (-4xy) - 8 \div \frac{xy}{2x^2y - xy^2} \\ &= \frac{8xy - 3x^2}{x} \times (-2) - 8 \times \frac{2x^2y - xy^2}{xy} \\ &= (-2) \times (8y - 3x) - 8(2x - y) \\ &= -16y + 6x - 16x + 8y = -10x - 8y \end{aligned}$$

14. 다음 그림과 같이 가로 길이가 a , 세로 길이가 b 인 직사각형 모양의 종이의 네 모퉁이에서 한 변의 길이가 2인 정사각형을 잘라내고 남은 부분으로 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들었다. 이 상자의 부피를 V 라 할 때, b 를 a 와 V 에 관한 식으로 바르게 나타낸 것은?



① $b = \frac{V}{8ab}$

② $b = v + 32ab$

③ $b = V + \frac{V}{2a + 8}$

④ $b = \frac{8V}{ab - 32}$

⑤ $b = \frac{V + 8a - 32}{2a - 8}$

해설

$$V = (a - 4)(b - 4) \times 2 = 2ab - 8a - 8b + 32 \text{ 이므로}$$

$$b(2a - 8) = V + 8a - 32$$

$$\therefore b = \frac{V + 8a - 32}{2a - 8}$$

15. $x + y = 3$ 이고, $A = 2^{2x}$, $B = 2^{2y}$ 일 때, AB 의 값은?

① 2^2

② 2^4

③ 2^6

④ 2^8

⑤ 2^{10}

해설

$$AB = 2^{2x} \times 2^{2y} = 2^{2x+2y} = 2^{2(x+y)} = 2^{2 \times 3} = 2^6 \text{ 이다.}$$

16. x, y 가 짝수일 때, $(-4)^2 \div (-2)^y = (-2)^{x-6}$ 이다. $x + y$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$(-2^2)^2 \div (-2)^y = (-2)^{x-6}$$

2, y , $x-6$ 이 모두 짝수이므로

$$(-2^2)^2 = (2^2)^2 = 2^4,$$

$$(-2)^y = 2^y, (-2)^{x-6} = 2^{x-6} \text{이다.}$$

$$2^4 \div 2^y = 2^{4-y} = 2^{x-6}$$

$$4 - y = x - 6$$

$$\therefore x + y = 10$$

17. $180^3 = 2^x \times 3^y \times 5^z$ 일 때, $x + y + z$ 값을 구하면?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

$$180^3 = (2^2 \times 3^2 \times 5)^3 = 2^6 \times 3^6 \times 5^3 = 2^x \times 3^y \times 5^z$$

$$x = 6, y = 6, z = 3$$

$$\therefore x + y + z = 15$$

18. $2^{100} = a$ 일 때, $4^{50} - 4^{49}$ 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① $\frac{1}{4}a$

② $\frac{1}{2}a$

③ $\frac{3}{4}a$

④ $\frac{3}{2}a$

⑤ $\frac{4}{3}a$

해설

$$\begin{aligned}4^{50} - 4^{49} &= (2^2)^{50} - (2^2)^{49} \\&= 2^{100} - 2^{98} \\&= 2^{100} - 2^{100} \div 2^2 \\&= 2^{100} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\&= \frac{3}{4} \times 2^{100} \\&= \frac{3}{4}a\end{aligned}$$

19. $(-2a^2b^3)^4 \times \left(\frac{a}{2b^2}\right)^2 \div \{-(a^2b)^3\}$ 을 계산하면?



① $-4a^4b^5$

② $-2a^6b^3$

③ $4a^5b^4$

④ $-4a^6b^3$

⑤ $2a^4b^5$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 16a^8b^{12} \times \frac{a^2}{4b^4} \div (-a^6b^3) \\&= 16a^8b^{12} \times \frac{a^2}{4b^4} \times \left(-\frac{1}{a^6b^3}\right) \\&= -4a^4b^5\end{aligned}$$

20. $x + y + z = 0$ 일 때, $x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ 의 값을 구하면? (단, $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \\ &= \frac{y}{y} + \frac{z}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{x}{x} + \frac{y}{y} \\ &= \frac{1}{x}(y+z) + \frac{1}{y}(x+z) + \frac{1}{z}(x+y) \\ &= \frac{1}{x}(-x) + \frac{1}{y}(-y) + \frac{1}{z}(-z) \\ &= (-1) + (-1) + (-1) = -3 \end{aligned}$$

21. 4개의 수 a, b, c, d 에 대하여 기호 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 로 정의한다.

이때, $\begin{vmatrix} x+2y-3 & -\frac{3}{2} \\ y-x+1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ 은?

① $x - \frac{5}{2}y - 3$

② $x - \frac{3}{2}y - 2$

③ $x + \frac{3}{2}y - 1$

④ $-x + \frac{5}{2}y$

⑤ $-x + \frac{7}{2}y$

해설

$$\begin{aligned} & (x+2y-3) \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) \times (y-x+1) \\ &= \left(\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ &= -x + \frac{5}{2}y \end{aligned}$$

22. 두 순서쌍 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 에 대하여 $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_2$ 로 정의한다. 이때, $(x, -2y) \times (2x, 5y)$ 를 간단히 하면?

① xy

② $3xy$

③ $5xy$

④ $7xy$

⑤ $9xy$

해설

$$\begin{aligned} & x \times (-2y) + x \times 5y + 2x \times (-2y) + 2x \times 5y \\ &= -2xy + 5xy - 4xy + 10xy \\ &= 9xy \end{aligned}$$

23. 어떤 수 a 에 $-\frac{3}{4}$ 을 곱해야 할 것을 잘못해서 나누었더니 $\frac{1}{3}$ 이 되었다.
이때, 바르게 계산된 값을 구하면?

① $\frac{1}{16}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{3}{16}$

⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$a \div \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3} \therefore a = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\text{바르게 계산된 값은 } -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

$$\therefore \frac{3}{16}$$

24. $a^2 = 12$, $b^2 = 18$ 일 때, $\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)$ 의 값은?

① -9

② -8

③ -6

④ -5

⑤ -3

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right) &= \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{2}{3}b\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}a^2 - \frac{4}{9}b^2 \\ &= \frac{1}{4} \times 12 - \frac{4}{9} \times 18 \\ &= 3 - 8 = -5\end{aligned}$$

25. $2(4+2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8) = 4^a - 2^b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

$2 = 4 - 2$ 이므로

$$(4-2)(4+2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)$$

$$= (4^2-2^2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)$$

$$= (4^4-2^4)(4^4+2^4)(4^8+2^8)$$

$$= (4^8-2^8)(4^8+2^8)$$

$$= 4^{16} - 2^{16}$$

$$\therefore a+b = 16+16 = 32$$

26. $(x+A)(x+B)$ 를 전개하였더니 $x^2 + Cx + 8$ 이 되었다. 다음 중 C 의 값이 될 수 없는 것은? (단, A, B, C 는 정수이다.)

① -9

② -6

③ 3

④ 6

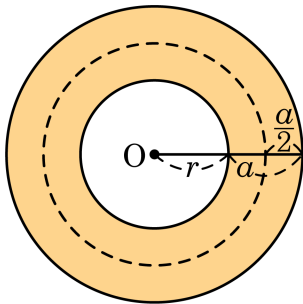
⑤ 9

해설

$(x+A)(x+B) = x^2 + (A+B)x + AB = x^2 + Cx + 8$ 이므로
 $A+B=C, AB=8$ 이다.

따라서 $C = (1+8, 2+4, -1-8, -2-4) = (9, 6, -9, -6)$ 이다.

27. 다음 그림에서 어두운 부분의 넓이를 a , b 를 써서 나타내면? (단, b 는 점선의 원주의 길이)



① ab

② $2ab$

③ πab

④ $2\pi ab$

⑤ $\pi a^2 b^2$

해설

$$b = 2\pi \left(r + \frac{a}{2} \right) = 2\pi r + \pi a = \pi(2r + a)$$

어두운 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \pi(a + r)^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(a^2 + 2ar + r^2 - r^2) \\ &= \pi a(a + 2r) \\ &= a \{ \pi(a + 2r) \} \\ &= ab \end{aligned}$$

28. $(3x - 2y + 4z)(2x + 2y - 4z)$ 를 전개하였을 때, xy, yz, zx 각각의 계수의 합은?

①

14

② 16

③ 18

④ 20

⑤ 22

해설

$$\begin{aligned} & (3x - 2y + 4z)(2x + 2y - 4z) \\ &= \{3x - (2y - 4z)\}\{2x + (2y - 4z)\} \end{aligned}$$

$2y - 4z = A$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} & (3x - A)(2x + A) \\ &= 6x^2 + Ax - A^2 \end{aligned}$$

$A = 2y - 4z$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} & 6x^2 + (2y - 4z)x - (2y - 4z)^2 \\ &= 6x^2 + 2xy - 4xz - 4y^2 + 16yz - 16z^2 \end{aligned}$$

$\therefore xy, yz, zx$ 각각의 계수의 합 : $2 + 16 + (-4) = 14$

29. $x = a(a + 5)$ 일 때, $(a - 1)(a + 2)(a + 3)(a + 6)$ 을 x 에 관한 식으로 나타내면?

① $x^2 - 36$

② $x^2 - 6$

③ $x^2 + 6$

④ $x^2 + 36$

⑤ $x^2 - 12x + 36$

해설

$$\begin{aligned}x &= a(a + 5) = a^2 + 5a \text{ 일 때,} \\(a - 1)(a + 2)(a + 3)(a + 6) \\&= \{(a - 1)(a + 6)\} \{(a + 2)(a + 3)\} \\&= (a^2 + 5a - 6)(a^2 + 5a + 6) \\&= (x - 6)(x + 6) \\&= x^2 - 36\end{aligned}$$

30. 자연수 a, b 에 대하여 $(x^a y)^4 = x^{12} y^b$ 인 관계가 있을 때, $\left(-\frac{1}{2}x^2 y\right)^a \div \left(\frac{1}{4}x^b y^2\right)^a \times (xy)^b$ 을 간단히 한 것은?

① $-\frac{8y}{x^2}$

② $\frac{8y}{x^2}$

③ $-\frac{8y}{x}$

④ $-\frac{y}{x^2}$

⑤ $\frac{8y^2}{x^2}$

해설

$(x^a y)^4 = x^{12} y^b$ 에서 $a = 3, b = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2}x^2 y\right)^a \div \left(\frac{1}{4}x^b y^2\right)^a \times (xy)^b \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 y\right)^3 \div \left(\frac{1}{4}x^4 y^2\right)^3 \times (xy)^4 \\ &= \frac{x^6 y^3}{-8} \times \frac{64}{x^{12} y^6} \times \frac{x^4 y^4}{1} \\ &= -\frac{8y}{x^2} \end{aligned}$$

31. $\frac{5a-3b}{3} + \frac{3a+5b}{4} = 2a-b$ 를 a 에 관하여 풀면?

① $a = 3b$

② $a = -3b$

③ $a = \frac{1}{3}b$

④ $a = \frac{3}{b}$

⑤ $a = -\frac{3}{b}$

해설

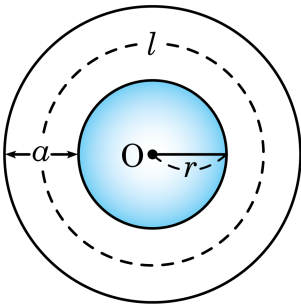
$$\frac{5a-3b}{3} + \frac{3a+5b}{4} = 2a-b$$

$$4(5a-3b) + 3(3a+5b) = 24a-12b$$

$$5a = -15b$$

$$\therefore a = -3b$$

32. 반지름의 길이가 r 인 원모양의 연못 둘레에 아래 그림과 같이 너비가 a 인 길이 있다. 이 길의 한 가운데를 지나가는 원의 둘레의 길이를 l 이라 할 때, 이 길의 넓이 S 를 a, l 의 식으로 나타내면?



① $S = a + l$

② $S = a - l$

③ $S = -a + l$

④ $S = al$

⑤ $S = \frac{al}{2}$

해설

$$l = (a + 2r)\pi$$

$$\begin{aligned} S &= (a + r)^2\pi - \pi r^2 \\ &= (a^2 + 2ar + r^2)\pi - \pi r^2 \\ &= (a^2 + 2ar)\pi \end{aligned}$$

$$\therefore S = a(a + 2r)\pi = al$$

33. $25^{2x+2} = 5^{x-3}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$$(5^2)^{2x+2} = 5^{4x+4} \text{ 이므로}$$

$$4x + 4 = x - 3, \quad 3x = -7$$

$$\therefore x = -\frac{7}{3}$$

34. $3^{2x-3} \div 3^{x+1} = 243$ 에서 x 의 값은?

① 3

② 4

③ 6

④ 7

⑤ 9

해설

$$3^{2x-3-(x+1)} = 3^{x-4} = 3^5$$

$$\therefore x - 4 = 5 \quad \therefore x = 9$$

35. 다음 식을 만족하는 최대의 자연수 n 에 대하여, $n - a + 2b - c$ 의 값은?

$$(x^a y^b z^c)^n = x^{56} y^{64} z^{88}$$

① -2

② 0

③ 4

④ 6

⑤ 10

해설

56, 64, 88 의 최대공약수는 8 이다.

따라서 $n = 8$ 이고, $a = 7$, $b = 8$, $c = 11$ 이다.

그러므로 $n - a + 2b - c = 8 - 7 + 16 - 11 = 6$ 이다.

36. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의한다. 이 때, $n \times 9! \times 6! \times 3!$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 가장 작은 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$n \times 9! \times 6! \times 3!$$

$$\begin{aligned} &= n \times (9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \\ &\quad \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) \\ &= n \times 3^2 \times 2^3 \times 7 \times (2 \times 3) \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &\quad \times (2 \times 3) \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= n \times 2^{12} \times 3^7 \times 5^2 \times 7 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서는 소인수들의 지수가 짝수가 되어야 하므로 가장 작은 자연수 n 은 $3 \times 7 = 21$ 이다.

$$\therefore n = 21$$

37. 음이 아닌 수 a, b 에 대하여 $2^a + 2^b \leq 1 + 2^{a+b}$ (단, 등호는 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 일 때 성립)이 성립한다. $a + b + c = 4$ 일 때, $2^a + 2^b + 2^c$ 의 최댓값을 구하여라. (단, $c \geq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$2^a + 2^b + 2^c \leq 1 + 2^{a+b} + 2^c$ (단, 등호는 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 일 때 성립)

$2^a + 2^b + 2^c \leq 1 + (1 + 2^{a+b+c})$ (단, 등호는 $a + b = 0$ 또는 $c = 0$ 일 때 성립)

$$2^a + 2^b + 2^c \leq 1 + (1 + 2^4)$$

$$2^a + 2^b + 2^c \leq 18$$

따라서 최댓값은 18 ($a = 0, b = 0$ 또는 $b = 0, c = 0$ 또는 $c = 0, a = 0$ 일 때)

38. $2^{19} \times 5^{21}$ 은 n 자리의 자연수이다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$2^{19} \times 5^{21} = 2^{19} \times 5^{19} \times 5^2 = 10^{19} \times 5^2 = 25 \times 10^{19}$$

따라서 21 자리의 수이므로 $n = 21$ 이다.

39. $2^{10} \doteq 1000$ 을 이용하여 $5^{11} = \frac{10^x}{2}$ 인 정수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$5^{11} = \frac{10^x}{2}$$

양변에 2^{11} 을 곱하면

$$2^{11} \times 5^{11} = 10^x \times 2^{10}$$

$$10^{11} = 10^x \times 10^3$$

$$10^8 = 10^x$$

$$\therefore x = 8$$

40. $x = 2$, $y = -1$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$2x - [7y - 2x - \{2x - (x - 3y)\}]$$

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

$2x - [7y - 2x - \{2x - (x - 3y)\}]$ 을 정리하면

$$2x - \{7y - 2x - (x + 3y)\}$$

$$= 2x - (-3x + 4y)$$

$$= 5x - 4y$$

$$5x - 4y = 5 \times 2 - 4 \times (-1) = 14$$

41. $(x-1)^{99}$ 을 전개했을 때, x^{49} 의 계수를 a , x^{50} 의 계수를 b 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x-1)^{99}$ 의 전개식에서 항은 100 개이고 계수들은 좌우대칭이 된다. 따라서 x^{49} 의 계수와 x^{50} 의 계수는 절댓값이 같고, 부호만 다르다.

$$\therefore a + b = 0$$

42. $a^2 = b^2 + c^2$ 일 때, $(a - b + c)(a + b - c)$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2bc$

해설

$$(a - b + c)(a + b - c) = \{a - (b - c)\} \{a + (b - c)\}$$

$b - c = X$ 로 치환하면

$$\therefore (a - X)(a + X) = a^2 - X^2 = (b^2 + c^2) - (b - c)^2 = 2bc$$

43. 자연수 x 를 7 로 나누면 4 가 남고, 자연수 y 를 7 로 나누면 5 가 남는다. xy 를 7 로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 를 7 로 나누었을 때의 몫을 a , y 를 7 로 나누었을 때의 몫을 b 라고 하면

$$x = 7a + 4, y = 7b + 5$$

$$\begin{aligned}\therefore xy &= (7a + 4)(7b + 5) \\ &= 49ab + 35a + 28b + 20 \\ &= 7(7ab + 5a + 4b + 2) + 6\end{aligned}$$

따라서 xy 를 7 로 나눈 나머지는 6 이다.

44. $abc = -4$, $a + b + c = 0$ 일 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a + b + c = 0$ 에서 $a + b = -c$, $b + c = -a$, $c + a = -b$ 이므로
주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (-c) \times (-a) \times (-b) \\ &= -abc = -(-4) = 4\end{aligned}$$

45. $(100^{20} - 5)^2$ 을 계산하였을 때, 각 자리 숫자의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 358

해설

$$\begin{aligned}(100^{20} - 5)^2 &= (10^{40} - 5)^2 \\&= 10^{80} - 10^{41} + 25 \\&= 999 \cdots 9000 \cdots 0 + 25 \\&= 999 \cdots 9000 \cdots 025\end{aligned}$$

이때, 연속되는 9 가 39 개, 연속되는 0 이 39 개이고, 십의 자리와 일의 자리 숫자가 2 와 5 이므로 각 자리의 숫자의 합은 $9 \times 39 + 2 + 5 = 358$ 이다.

46. $x^2 - 2x + 1 = 0$ 일 때, $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $x^2 = 2x - 1 \cdots \textcircled{㉠}$

$\textcircled{㉠}$ 에 x 를 곱하면 $x^3 = 2x^2 - x = 2(2x - 1) - x = 3x - 2$,
즉, $x^3 = 3x - 2 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉡}$ 에 x 를 곱하면 $x^4 = 3x^2 - 2x = 3(2x - 1) - 2x = 4x - 3$,
 $\therefore x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1 = (4x - 3) - 3(3x - 2) + 2(2x - 1) + x - 1 = 0$

47. $A = 3^a$ 일 때, $B(A) = a + 1$ 이라고 정의하자. 자연수 n 에 대하여

$B\left(\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$81 = 3^4$, $243 = 3^5$ 이고 주어진 식을 분배법칙을 이용하여
공통인수로 묶으면

$$\begin{aligned}\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3} &= \frac{9\{(3^4)^4 - (3^5)^3\}}{(2 \times 3) \times (3^5)^3} \\ &= \frac{3(3^{16} - 3^{15})}{3(2 \times 3^{15})} \\ &= \frac{2 \times 3^{15}}{2 \times 3^{15}} = 3\end{aligned}$$

$$(\because 3^{16} - 3^{15} = 3 \times 3^{15} - 3^{15} = 2 \times 3^{15})$$

$$\therefore B\left(\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3}\right) = B(3) = 1 + 1 = 2$$

48. 두 자연수 a, b 에 대하여 $x = a + b, y = a - b$ 이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때, a, b 의 값을 구하여라.(단, $a > b$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

$x = a + b, y = a - b$ 를 $x^2 + y^2 = 10$ 식에 대입하면

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 10$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

따라서 $a^2 = 4, b^2 = 1$ 에서 $a = 2, b = 1$ 이다.

49. $4x + 11y + 17 = 9x + 10y + 15$ 일 때 $x - y + 2$ 를 x 에 관한 식으로 나타내면?

① $x + 1$

② $2x + 2$

③ $3x + 3$

④ $-4x + 4$

⑤ $5x + 5$

해설

$4x + 11y + 17 = 9x + 10y + 15$ 을 y 에 관하여 정리하면 $y = 5x - 2$ 이다.

$y = 5x - 2$ 를 $x - y + 2$ 에 대입하면 $x - (5x - 2) + 2 = -4x + 4$ 이다.

50. $\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2}$ 일 때, $\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2}$ 의 양변에 $x-y$ 를 곱하면

$$1 = \frac{z}{-(x-y)(x+y)} \times (x-y) = \frac{z}{-(x+y)}$$

$$\therefore x+y+z=0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$$

$$= \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \quad (\textcircled{1} \text{을 대입})$$

$$= \frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} + \frac{-z}{z} = -1 - 1 - 1 = -3$$