1. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11번째 항은?

① -13　② -10　③ 11　④ -11　⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11번째 항은 11이다.

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6 의 값은?

① $-\sqrt{3}$　② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$(복호동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$ 이므로
$(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)$ 에서
$4a_6 = 2\sqrt{3}$ $\therefore$ $a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 수열 a, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, b, $\cdots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

공차를 d라 하면 $d=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

4. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가) 에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$　$\therefore$ $(가) = \frac{3}{2}$

5. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10}을 구하면?

① 150 ② 170 ③ 190 ④ 210 ⑤ 230

해설

$a=3,\ d=4,\ n=10$이므로

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$에 대입하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2\cdot 3+(10-1)\cdot 4\}}{2}=210$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 21

해설

$a_{10} = S_{10} - S_9$
$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$
$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$
$\therefore\ a_{10} = 119 - 98 = 21$

7. 세 수 $x-4,\ x,\ x+8$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

x가 $x-4,\ x,\ x+8$의 등비중항이므로
$x^2=(x-4)(x+8),\ x^2=x^2+4x-32$
$4x=32 \therefore x=8$

8. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460 ② 468 ③ 478 ④ 480 ⑤ 484

해설

$\sum_{k=1}^{10} k(k+2) = \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^{2} k(k+2)$
$= \sum_{k=1}^{10} (k^2+2k) - \sum_{k=1}^{2} (k^2+2k)$
$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k - (3+8)$
$= \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2} - 11$
$= 385 + 110 - 11$
$= 484$

9. 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \cdots$ 의 제 15항까지의 합은?

① $\sqrt{14}-1$　　② $\sqrt{15}-1$　　③ 3

④ $\sqrt{15}+1$　　⑤ 5

해설

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$

$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=-\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$=-\left\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$

$-\left\{(\sqrt{15}-\sqrt{16})\right\}$

$=-(1-\sqrt{16})=\sqrt{16}-1=4-1=3$

10. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -3은 -27의 세제곱근이다.

② 81의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$이다.

③ $-\sqrt[4]{81} = -3$

④ $\sqrt[4]{-16} = -2$

⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt[4]{-16} = \pm -2$

11. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $(-100)^0$

② $a^2 \times a \div a^3$

③ $\dfrac{3^3 \div 3^2}{3}$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \dfrac{a^3}{a^{3\sqrt{2}}}$

해설

① $(-100)^0 = 1$

② $a^2 \times a \div a^3 = a^{2+1-3} = a^0 = 1$

③ $\dfrac{3^3 \div 3^2}{3} = \dfrac{3^{3-2}}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$

$= a^{-\sqrt{3}} \times a^{3\sqrt{3}} \times a^{-2\sqrt{3}}$

$= a^{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = a^0 = 1$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \dfrac{a^3}{a^{3\sqrt{2}}} = a^{\sqrt{2}} \times a^3 \div a^{3\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}} = a^{3-2\sqrt{2}}$

12. $a = 4^3$ 일 때, 8^9 을 a에 관한 식으로 나타내면?

① a^2 ② $a^{\frac{5}{2}}$ ③ a^3 ④ $a^{\frac{7}{2}}$ ⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

$a = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \therefore \ 2 = a^{\frac{1}{6}}$

$8^9 = (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}}$

13. 다음 식의 값 중 값이 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$　　② $\log_{\sqrt{5}} 25$

③ $\log_2 3 \log_3 5 \log_5 16$　　④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4$

③ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16 = \frac{\log 3 \cdot \log 5 \cdot \log 16}{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 5}$

$= \frac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 16 = \log_2 16 = 4$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

14. $2^{2\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{2}\log_2 4}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2\log_2 2+\log_2 5-\dfrac{1}{2}\log_2 4=\log_2 4+\log_2 5-\log_2 2$

$=\log_2 \dfrac{4\times 5}{2}=\log_2 10$

$\therefore 2^{2\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{2}\log_2 4}=2^{\log_2 10}=10$

15. $\log 3.14 = 0.4969$ 일 때, $\log 3140^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34, 0.969

해설

$\log 3140^{10} = 10 \log 3140$
$= 10 \log(3.14 \times 1000)$
$= 10(\log 3.14 + \log 1000)$
$= 10(0.4969 + 3)$
$= 10 \times 3.4969 = 34.969$

16. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 100$

$2a+9d = 20$

$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$

$10(2a+19d) = 400$

$2a+19d = 40$

$2a+9d+10d = 40$

$20+10d = 40$

$d = 2$

$\therefore 2a = 2,\ a = 1$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15\times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

17. $x_i \in \{0,\ 1,\ 2\}$이고, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 34$일 때, $\sum_{i=1}^{n} x_i^3$의 값은?

① 62　② 74　③ 86　④ 98　⑤ 110

해설

x_i중 1을 a개, 2를 b개 택한다면
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \times a + 2 \times b = 20 \quad \therefore a + 2b = 20 \cdots\cdots$ ㉠
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2 \times a + 2^2 \times b = 34 \quad \therefore a + 4b = 34 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a = 6,\ b = 7$
$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1^3 \times 6 + 2^3 \times 7 = 6 + 56 = 62$

18. 수열 $1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ \cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① n^2+n+1　② n^2+n-1　③ n^2+n-2
④ n^2-n+1　⑤ n^2-n-1

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$$\begin{array}{l} \{a_n\} : 1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ \cdots \\ \quad\quad \bigvee\ \bigvee\ \bigvee\ \ \bigvee \\ \quad\quad 4\quad 6\quad 8\quad 10\ \ \cdots\ \rightarrow b_n = 2n+2 \end{array}$$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

$= 1 + 2 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$

$= n^2+n-1$

19. 수열 $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ 1+2+2^2+2^3, \cdots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $2^n - n$　　② $2^{n+1} - 1$　　③ $2^{n+1} - n$

④ $2^{n+1} - n - 1$　　⑤ $2^{n+1} - n - 2$

해설

수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

20. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항 a_n은?

① 2^{n-1}　　② $2^{n-1} + n - 1$　　③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$　　⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + 2 \\
&a_3 = a_2 + 2^2 \\
&\quad \vdots \\
+)\ &\underline{a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}} \\
&a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
&\quad = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\
&\quad = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
&\quad = \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
&\quad = 2^n - 1
\end{aligned}
$$

21. 높이가 h인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n번째 날의 탑의 높이를 a_n이라 하면 $(n+1)$째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$의 합이므로

$a_1=\frac{h}{2}$이고, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}a_n=\frac{3}{2}a_n$

$\therefore a_n=\frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10}=\frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{9}=\frac{h}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

즉, $a=\frac{h}{3}$이므로 $\frac{a}{h}=\frac{1}{3}$

22. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \quad \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$일 때, (좌변)= (우변)=2

(ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \quad \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \quad \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{\text{(나)}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{\text{(가)}}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나) 에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n = 1$일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$

(ii) $n = k$일 때 성립한다고 가정하고, $n = k+1$을 대입하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \quad \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$을 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1)\boxed{2(2k+1)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$

$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$

따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i) ,(ii) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$

$\therefore \dfrac{g(k)}{f(k)} = 2^k$

$\therefore \dfrac{g(10)}{f(10)} = 1024$

23. $\log_{1-x}(-x^2 - 2x + 15)$ 의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

① -15　② -10　③ -6　④ 2　⑤ 4

해설

밑의 조건에서

$1 - x > 0,\ 1 - x \neq 1$

$\therefore x \neq 0, x < 1 \cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서

$-x^2 - 2x + 15 > 0,\ (x-3)(x+5) < 0$

$\therefore -5 < x < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통 범위를 구하면

$-5 < x < 0,\ 0 < x < 1$

따라서 구하는 정수 x는 $-4, -3, -2, -1$ 이고 그 합은 -10 이다.

24. $x = \sqrt{7+\sqrt{33}},\ y = \sqrt{7-\sqrt{33}}$일 때, $\log_2 x + \log_2 y$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$

$= \log_2 \sqrt{7+\sqrt{33}}\sqrt{7-\sqrt{33}}$

$= \log_2 \sqrt{49-33} = \log_2 \sqrt{16}$

$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

25. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 1.5$ 의 값을 계산하면?

① 0.0880 ② 0.0885 ③ 0.1660
④ 0.1761 ⑤ 0.1777

해설

$\log_{10} 1.5 = \log_{10}(3 \times 5 \div 10)$
$= \log 3 + (1 - \log 2) - 1$
$= 0.1761$