**1.** 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11 번째 항은?

① $-13$　② $-10$　③ $11$　④ $-11$　⑤ $13$

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11 번째 항은 11 이다.

**2.** 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, $a_6$의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $0$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

**해설**

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$(복호동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$이므로

$(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)$에서

$4a_6 = 2\sqrt{3} \quad \therefore\ a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**3.** 수열 $a,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ b,\ \cdots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

공차를 $d$라 하면 $d=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

**4.** 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

| |
|---|
| 6, 3, 2, (가) |

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

**해설**

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$　$\therefore$ $(가)=\frac{3}{2}$

**5.** 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 $S_{10}$을 구하면?

① 150 ② 170 ③ 190 ④ 210 ⑤ 230

**해설**

$a = 3,\ d = 4,\ n = 10$이므로

$S_n = \dfrac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$에 대입하면

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 4\}}{2} = 210$$

**6.** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합 $S_n$이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, $a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$

$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$

$\therefore\ a_{10} = 119 - 98 = 21$

**7.** 세 수 $x-4,\ x,\ x+8$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 $x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x$가 $x-4,\ x,\ x+8$의 등비중항이므로

$x^2=(x-4)(x+8),\ x^2=x^2+4x-32$

$4x=32 \therefore x=8$

**8.** $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460 ② 468 ③ 478 ④ 480 ⑤ 484

해설

$\sum_{k=1}^{10} k(k+2) = \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^{2} k(k+2)$

$= \sum_{k=1}^{10} (k^2+2k) - \sum_{k=1}^{2} (k^2+2k)$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k - (3+8)$

$$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 11$$

$= 385 + 110 - 11$

$= 484$

**9.** 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \cdots$ 의 제 15항까지의 합은?

① $\sqrt{14}-1$ ② $\sqrt{15}-1$ ③ 3
④ $\sqrt{15}+1$ ⑤ 5

해설

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$=-\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$$

$$=-\left\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$$

$$-\left\{(\sqrt{15}-\sqrt{16})\right\}$$

$$=-(1-\sqrt{16})=\sqrt{16}-1=4-1=3$$

**10.** 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $-3$은 $-27$의 세제곱근이다.

② $81$의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$이다.

③ $-\sqrt[4]{81} = -3$

④ $\sqrt[4]{-16} = -2$

⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt[4]{-16} = \pm-2$

**11.** 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $(-100)^0$

② $a^2 \times a \div a^3$

③ $\dfrac{3^3 \div 3^2}{3}$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \dfrac{a^3}{a^{3\sqrt{2}}}$

해설

① $(-100)^0 = 1$

② $a^2 \times a \div a^3 = a^{2+1-3} = a^0 = 1$

③ $\dfrac{3^3 \div 3^2}{3} = \dfrac{3^{3-2}}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$

$= a^{-\sqrt{3}} \times a^{3\sqrt{3}} \times a^{-2\sqrt{3}}$

$= a^{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = a^0 = 1$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \dfrac{a^3}{a^{3\sqrt{2}}} = a^{\sqrt{2}} \times a^3 \div a^{3\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}} = a^{3-2\sqrt{2}}$

**12.** $a = 4^3$ 일 때, $8^9$을 $a$에 관한 식으로 나타내면?

① $a^2$  ② $a^{\frac{5}{2}}$  ③ $a^3$  ④ $a^{\frac{7}{2}}$  ⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

**해설**

$a = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \therefore\ 2 = a^{\frac{1}{6}}$

$8^9 = (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}}$

**13.** 다음 식의 값 중 값이 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$ ② $\log_{\sqrt{5}} 25$

③ $\log_2 3 \log_3 5 \log_5 16$ ④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4$

③ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16 = \frac{\log 3 \cdot \log 5 \cdot \log 16}{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 5}$

$= \frac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 16 = \log_2 16 = 4$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

**14.** $2^{2\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{2}\log_2 4}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$2\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{2}\log_2 4=\log_2 4+\log_2 5-\log_2 2$$

$$=\log_2 \frac{4\times 5}{2}=\log_2 10$$

$$\therefore 2^{2\log_2 2+\log_2 5-\frac{1}{2}\log_2 4}=2^{\log_2 10}=10$$

**15.** $\log 3.14 = 0.4969$ 일 때, $\log 3140^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $34,\ 0.969$

해설

$\log 3140^{10} = 10 \log 3140$

$= 10 \log(3.14 \times 1000)$

$= 10(\log 3.14 + \log 1000)$

$= 10(0.4969 + 3)$

$= 10 \times 3.4969 = 34.969$

**16.** 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a + 19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a + 19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2,\ a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a + 29d)}{2} - (100 + 300) \\ &= \frac{30(2 + 29 \times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

**17.** $x_i \in \{0,\ 1,\ 2\}$이고, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 34$일 때, $\sum_{i=1}^{n} x_i^3$의 값은?

① 62　② 74　③ 86　④ 98　⑤ 110

해설

$x_i$ 중 1을 $a$개, 2를 $b$개 택한다면

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \times a + 2 \times b = 20 \quad \therefore a + 2b = 20 \cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2 \times a + 2^2 \times b = 34 \quad \therefore a + 4b = 34 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 6,\ b = 7$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1^3 \times 6 + 2^3 \times 7 = 6 + 56 = 62$

**18.** 수열 1, 5, 11, 19, 29, $\cdots$ 의 일반항 $a_n$ 은?

① $n^2+n+1$ ② $n^2+n-1$ ③ $n^2+n-2$

④ $n^2-n+1$ ⑤ $n^2-n-1$

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$$\{a_n\} : 1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ \cdots$$

$$\vee\ \vee\ \vee\ \vee$$

$$4\quad 6\quad 8\quad 10\quad \cdots \rightarrow b_n = 2n+2$$

$$\therefore a_n = 1+\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$$

$$= 1+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)$$

$$= n^2+n-1$$

**19.** 수열 $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ 1+2+2^2+2^3, \cdots$ 의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합은?

① $2^n - n$ ② $2^{n+1} - 1$ ③ $2^{n+1} - n$

④ $2^{n+1} - n - 1$ ⑤ $2^{n+1} - n - 2$

해설

수열의 일반항 $a_n$ 은

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

따라서 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합 $S_n$ 은

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2$$

**20.** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항 $a_n$은?

① $2^{n-1}$　　② $2^{n-1} + n - 1$　　③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$　　⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$$
\begin{array}{rl}
 & a_2 = a_1 + 2 \\
 & a_3 = a_2 + 2^2 \\
 & \vdots \\
+) & \underline{a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}} \\
 & a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
 & \quad = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\
 & \quad = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
 & \quad = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} \\
 & \quad = 2^n - 1
\end{array}
$$

**21.** 높이가 $h$인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

**해설**

$n$번째 날의 탑의 높이를 $a_n$이라 하면 $(n+1)$째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 $a_n$과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$의 합이므로

$a_1 = \frac{h}{2}$이고, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$

$$\therefore a_n = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{h}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

즉, $a = \frac{h}{3}$이므로 $\frac{a}{h} = \frac{1}{3}$

**22.** 다음은 모든 자연수 $n$에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots ㉠$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, (좌변)= (우변)=2

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{\text{(나)}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{\text{(가)}}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n=1$일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$을 대입하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$을 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1)\boxed{2(2k+1)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$

$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$

$\therefore \dfrac{g(k)}{f(k)} = 2^k$

$\therefore \dfrac{g(10)}{f(10)} = 1024$

**23.** $\log_{1-x}(-x^2-2x+15)$ 의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 $x$의 값의 합은?

① $-15$　② $-10$　③ $-6$　④ $2$　⑤ $4$

해설

밑의 조건에서

$1-x>0,\ 1-x\neq 1$

$\therefore x\neq 0, x<1\cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서

$-x^2-2x+15>0,\ (x-3)(x+5)<0$

$\therefore -5<x<3\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통 범위를 구하면

$-5<x<0,\ 0<x<1$

따라서 구하는 정수 $x$는 $-4,-3,-2,-1$이고 그 합은 $-10$이다.

**24.** $x = \sqrt{7 + \sqrt{33}}$, $y = \sqrt{7 - \sqrt{33}}$일 때, $\log_2 x + \log_2 y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$

$= \log_2 \sqrt{7 + \sqrt{33}}\sqrt{7 - \sqrt{33}}$

$= \log_2 \sqrt{49 - 33} = \log_2 \sqrt{16}$

$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

**25.** $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$을 이용하여 $\log_{10} 1.5$의 값을 계산하면?

① 0.0880 ② 0.0885 ③ 0.1660

④ 0.1761 ⑤ 0.1777

해설

$\log_{10} 1.5 = \log_{10}(3 \times 5 \div 10)$

$= \log 3 + (1 - \log 2) - 1$

$= 0.1761$