

1. 유리수 a, b 가 등식 $(a + \sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$ 를 만족시킬 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$$

무리수의 상등에 의하여

$$\text{유리수 부분 : } (a^2 + 2) = 6, a^2 = 4$$

$$\text{무리수 부분 : } 2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}, 2a = b$$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4, ab = 8 \\ a = -2, b = -4, ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$$\therefore ab = 8$$

2. $y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 이므로

점근선 $x=1$ 에서 $y = \frac{ax+1}{x-1}$

점근선 $y=2$ 에서 $y = \frac{2x+1}{x-1}$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로

$\therefore a+b=2-1=1$

3. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1} + \sqrt{-12x}$ 의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

② $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

③ $\{x \mid x \geq 1\}, \{y \mid y \leq 0\}$

④ $\{x \mid x \leq 1\}, \{y \mid y \geq 0\}$

⑤ $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \leq 1\}$

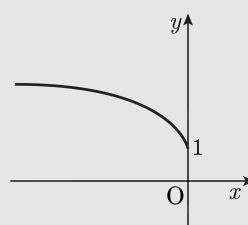
해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x+1} + \sqrt{-12x} \\ &= \sqrt{-3x+1} + 2\sqrt{(-3x) \cdot 1} \\ &= \sqrt{-3x+1} \end{aligned}$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$



4. $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$a+b=1, 2a+b=3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

5. $\frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = a + \frac{b}{x-1}$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} &= \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

6. $2 + \frac{1}{k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}}} = \frac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m 의 값에 대하여 $k + m$ 의

값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\begin{aligned}\frac{803}{371} &= 2 + \frac{61}{371} = 2 + \frac{1}{\frac{371}{61}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{5}{61}} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{61}{5}}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{12 + \frac{1}{5}}}\end{aligned}$$

따라서 $k = 6, m = 12$

$\therefore k + m = 18$

7. $2x = 3y$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2}$ 의 값은?

① $\frac{7}{13}$

② $\frac{6}{13}$

③ $\frac{7}{12}$

④ $\frac{19}{12}$

⑤ $\frac{7}{5}$

해설

$$= \frac{3}{2}y \text{ 이므로}$$

준식에 대입하면

$$\frac{\frac{9}{4}y^2 - \frac{3}{2}y^2 + y^2}{\frac{9}{4}y^2 - y^2} = \frac{7}{5}$$

8. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \times 2 - \textcircled{B} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

9. 다음 식이 성립하는 실수 x 의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$ 가 성립되지 않는 범위는 $x+1 < 0$ 이고 $x-2 < 0$

$\therefore x < -1$

따라서 $x < -1$ 일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x < -1\}$ 의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$ 이고 실수 x 의 최솟값은 $\therefore -1$

10. $x = \frac{1}{\sqrt{5} + 2\sqrt{6}}, y = \frac{1}{\sqrt{5} - 2\sqrt{6}}$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x + y = 2\sqrt{3}, xy = 1$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 1 = 11$$

11. 함수 $f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \frac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \frac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

$$\therefore c = -7$$

따라서 $f(x) = \frac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

12. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

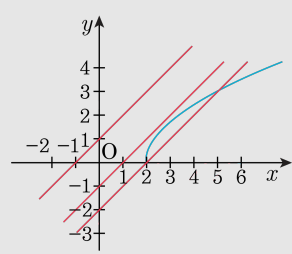
$$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$$

13. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$ 과 직선 $y = x+k$ 가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?
- ① $k = -2$ 또는 $k > 1$ ② $k = -1$ 또는 $k < -2$
- ③ $k = 1$ 또는 $k > 2$ ④ $k = 2$ 또는 $k < -1$
- ⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는 접하는 경우이거나 $k < -2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$ 에서

$$4x-8 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2 + 8) = -4k - 4 = 0 \text{에서 } k = -1$$

따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

14. $a : b = c : d$ 일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b + 2d \neq 0$, $a - 2b \neq 0$, $c - 3d \neq 0$ 이다.)

보기

㉠ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

㉡ $\frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d}$

㉢ $\frac{a+2b}{a-2b} = \frac{c+3d}{c-3d}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \dots$ 참

㉡ $\frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc, ad = bc \dots$ 참

㉢ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \dots$ 거짓

15. 실수 x 를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$ 라고 하고 $\{x\} = x - [x]$ 로 정의

하자 $x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ 일 때, $[\{ \{x\}^{-1} \}^{-1}]$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 - 2\sqrt{25 \times 3}} = 5 - \sqrt{3}$$

$$[5 - \sqrt{3}] = [3.2\cdots\cdots] = 3$$

$$\{x\} = (5 - \sqrt{3}) - 3 = 2 - \sqrt{3},$$

$$\{x\}^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\{2 + \sqrt{3}\} = 2 + \sqrt{3} - [2 + \sqrt{3}] = \sqrt{3} - 1$$

$$\{2 + \sqrt{3}\}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1.3\cdots\cdots$$

$$\text{따라서, } \{\{x\}^{-1}\}^{-1} = 1$$

16. 분수함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- I. $f(0) = g(0) = -1$
- II. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.
- III. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

- ① I
- ② I, II
- ③ I, III
- ④ II, III
- ⑤ I, II, III

해설

- I. $f(0) = -1, g(0) = \frac{1}{f(0)} = -1$
 $\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>
- II. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로
$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$
$$= \frac{x+1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{f(x)}$$
$$= g(x)$$
 -<참>
- III. $y = f(x-1) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$
따라서, 점근선은 $x = 0, y = 1$
 $y = g(x+1) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$
따라서 점근선은 $x = 0, y = 1$ -<참>
따라서 옳은 것은 (I), (II), (III) 이다.

17. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은? (단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \dots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

- ① $\frac{3}{2}$ ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$f(0) = 3,$$

$$f^2(0) = \frac{6-3}{3-1} = \frac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\therefore f^{3n}(0) = 0$$

$$1999 = 666 \times 3 + 1$$

$$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$$

18. 함수 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 좌표평면 위에서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표를 구하면?

- ① $(-1, -1)$ ② $(0, 0)$ ③ $(1, 1)$
④ $(2, 2)$ ⑤ $(3, 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 서로 역함수이므로
두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 와
직선 $y = x$ 의 교점과 일치한다.
따라서 $\sqrt{2x+3} = x$ 의 양변을 제곱하여
정리하면 $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -1, 3$
 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
즉, 교점의 좌표는 $(3, 3)$ 이다.

19. 일원 단위까지 계산된 어느 제품의 생산 가격의 4%를 이윤으로 붙인 판매 가격 n 이 반올림 없이 100 원 미만의 단위는 없다고 한다. 이 때, 최소의 n 은?

- ① 100
- ② 1300
- ③ 2500
- ④ 2600
- ⑤ 10000

해설

생산 가격을 m , 판매 가격을 n 이라고 하면
판매 가격 n 의 100 원 미만의 단위는 없으므로
 $n = 100a(a$ 는 자연수), $(1.04)m = 100a$
 $8 \cdot 13 \cdot m = 100^2a, m = 2 \cdot 5^4 \cdot \frac{a}{13}$
 m 이 자연수이기 위한 최소의 자연수 a 는 13이다.
 $\therefore n = 1300$

20. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 2$ 일 때, $\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}}$ 의 값

은?

- ① $-1 + \sqrt{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}$
- ④ 1

⑤ 2

해설

같은 모양의 식이 연속적으로 반복되어 있는데 양변을 제곱하면 똑같은 모양이 또 나타난다.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 2 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 4$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 2 \text{이므로}$$

$$x + 2 = 4$$

$$\therefore x = 2$$

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \text{의 값을 } a \text{라 하면}$$

$$\frac{1}{2 + a} = a, a(2 + a) = 1, a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a = -1 + \sqrt{2}$$