1. 유리수 a, b가 등식 $(a+\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$
무리수의 상등에 의하여
유리수 부분 : $(a^2+2) = 6,\ a^2 = 4$
무리수 부분 : $2a\sqrt{2} = b\sqrt{2},\ 2a = b$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4,\ ab = 8 \\ a = -2, b = -4,\ ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$\therefore ab = 8$

2. $y = \dfrac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x = 1, y = 2$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$y = \dfrac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x = 1, y = 2$ 이므로

점근선 $x = 1$ 에서 $y = \dfrac{ax+1}{x-1}$

점근선 $y = 2$ 에서 $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

따라서 $a = 2,\ b = -1$ 이므로

$\therefore a+b = 2-1 = 1$

3. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x + 1 + \sqrt{-12x}}$의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

② $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

③ $\{x \mid x \geq 1\}, \{y \mid y \leq 0\}$

④ $\{x \mid x \leq 1\}, \{y \mid y \geq 0\}$

⑤ $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \leq 1\}$

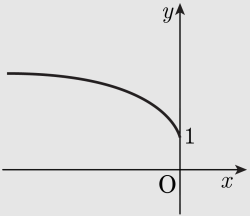
해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x + 1 + \sqrt{-12x}} \\ &= \sqrt{-3x + 1 + 2\sqrt{(-3x) \cdot 1}} \\ &= \sqrt{-3x} + 1 \end{aligned}$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$



4. $\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$
$$= \frac{(a+b)\,x+2a+b}{(x+1)\,(x+2)}$$

$a+b=1, 2a+b=3$

$\therefore\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a^2+b^2=2^2+(-1)^2=5$

5. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x-1}}{1-\dfrac{1}{x+1}}=a+\dfrac{b}{x-1}$ 이라 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\frac{1+\dfrac{1}{x-1}}{1-\dfrac{1}{x+1}}=\frac{\dfrac{x-1+1}{x-1}}{\dfrac{x+1-1}{x+1}}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x+1}}$$

$$=\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$a+\frac{b}{x-1}=\frac{ax-a+b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{ax-a+b}{x-1}$$

$\therefore\ a=1,\ b=2 \Rightarrow a^2+b^2=5$

6. $2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m의 값에 대하여 $k+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\frac{803}{371}=2+\frac{61}{371}=2+\cfrac{1}{\cfrac{371}{61}}$$

$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{61}{5}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}}$$

따라서 $k=6,\ m=12$

$\therefore k+m=18$

7. $2x = 3y$ 일 때, $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{7}{13}$ ② $\dfrac{6}{13}$ ③ $\dfrac{7}{12}$ ④ $\dfrac{19}{12}$ ⑤ $\dfrac{7}{5}$

해설

$= \dfrac{3}{2}y$ 이므로

준식에 대입하면

$$\frac{\frac{9}{4}y^2 - \frac{3}{2}y^2 + y^2}{\frac{9}{4}y^2 - y^2} = \frac{7}{5}$$

8. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0\cdots$ ㉠

$x-2y+3z=0\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ $: 3x=z$

$\therefore x=\dfrac{z}{3},\ y=\dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\dfrac{3}{5}\quad \therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

9. 다음 식이 성립하는 실수 x의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$가 성립되지 않는 범위는

$x+1<0$ 이고 $x-2<0$

$\therefore\ x<-1$

따라서 $x<-1$일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x<-1\}$의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$이고 실수 x의 최솟값은 $\therefore\ -1$

10. $x=\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$x+y=2\sqrt{3},\ \ xy=1$$

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=12-1=11$$

11. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

$\therefore\ c = -7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

12. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

13. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x+k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k=-2$ 또는 $k>1$

② $k=-1$ 또는 $k<-2$

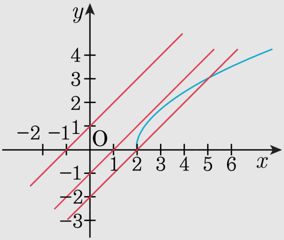
③ $k=1$ 또는 $k>2$

④ $k=2$ 또는 $k<-1$

⑤ $k=-1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k<-2$인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$에서

$4x-8 = x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

$\dfrac{D}{4} = (k-2)^2-(k^2+8) = -4k-4 = 0$에서 $k=-1$

따라서 $k=-1$ 또는 $k<-2$

14. $a : b = c : d$일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b+2d \neq 0$, $a-2b \neq 0$, $c-3d \neq 0$이다.)

보기

ㄱ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

ㄴ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d}$

ㄷ $\dfrac{a+2b}{a-2b} = \dfrac{c+3d}{c-3d}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \cdots$ 참

ㄴ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc,\ ad = bc \cdots$ 참

ㄷ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \cdots$ 거짓

15. 실수 x를 넘지 않는 최대의 정수를$[x]$라고 하고 $\{x\} = x - [x]$로 정의하자 $x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$일 때, $\left[\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1}\right]$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 - 2\sqrt{25 \times 3}} = 5 - \sqrt{3}$

$[5 - \sqrt{3}] = [3.2\cdots\cdots] = 3$

$\{x\} = (5 - \sqrt{3}) - 3 = 2 - \sqrt{3}$,

$$\{x\}^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\left\{2 + \sqrt{3}\right\} = 2 + \sqrt{3} - [2 + \sqrt{3}] = \sqrt{3} - 1$$

$$\left\{2 + \sqrt{3}\right\}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1.3\cdots\cdots$$

따라서, $\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1} = 1$

16. 분수함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $f(0) = g(0) = -1$

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.

Ⅲ. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① Ⅰ ② Ⅰ, Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ

④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $f(0) = -1,\ g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{f(x)}$$

$= g(x)$ -<참>

Ⅲ. $y = f(x-1) = \dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x = 0, y = 1$

$y = g(x+1) = \dfrac{x+2}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$

따라서 점근선은 $x = 0, y = 1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 이다.

17. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은?(단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \cdots\cdots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(0) = 3,$

$f^2(0) = \dfrac{6-3}{3-1} = \dfrac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\therefore\ f^{3n}(0) = 0$

$1999 = 666 \times 3 + 1$

$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$

18. 함수 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 좌표평면 위에서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1,\ -1)$　② $(0,\ 0)$　③ $(1,\ 1)$

④ $(2,\ 2)$　⑤ $(3,\ 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 서로 역함수이므로
두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 와
직선 $y = x$ 의 교점과 일치한다.
따라서 $\sqrt{2x+3} = x$ 의 양변을 제곱하여
정리하면 $x^2 - 2x - 3 = 0,\ (x+1)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = -1,\ 3$
$x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
즉, 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이다.

19. 일원 단위까지 계산된 어느 제품의 생산 가격의 4 %를 이윤으로 붙인 판매 가격 n이 반올림 없이 100 원 미만의 단위는 없다고 한다. 이 때, 최소의 n은?

① 100　② 1300　③ 2500
④ 2600　⑤ 10000

해설

생산 가격을 m, 판매 가격을 n이라고 하면
판매 가격 n의 100 원 미만의 단위는 없으므로
$n = 100a$(a는 자연수), $(1.04)\,m = 100a$

$$8 \cdot 13 \cdot m = 100^2 a,\ m = 2 \cdot 5^4 \cdot \frac{a}{13}$$

m이 자연수이기 위한 최소의 자연수 a는 13이다.
$\therefore\ n = 1300$

20. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$일 때, $\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\ddots}}}}$의 값은?

① $-1+\sqrt{2}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\sqrt{2}$
④ 1　⑤ 2

해설

같은 모양의 식이 연속적으로 반복되어 있는데 양변을 제곱하면 똑같은 모양이 또 나타난다.

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$의 양변을 제곱하면

$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 4$

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$이므로

$x+2=4$

$\therefore\ x=2$

$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\ddots}}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$의 값을 a라 하면

$\frac{1}{2+a}=a,\ a(2+a)=1\ ,\ a^2+2a-1=0$

$\therefore\ a=-1\pm\sqrt{2}$

$0<a<1$ 이므로 $a=-1+\sqrt{2}$