1. 다음 식을 간단히 하면 $\dfrac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{5}{x(x+10)}$$

$a=5,\ b=10$ 이므로 $a+b=15$

2. $-1 < x < 1$일 때, $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(\text{준식}) = \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$$
$$=|x-1|+|x+1|=-(x-1)+(x+1)=2$$

3. $2+\sqrt{3}=\sqrt{a+b\sqrt{3}}$($a$, b는 유리수) 일 때, $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2+\sqrt{3}=\sqrt{a+b\sqrt{3}}$
양변을 제곱하면
$4+3+4\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}$
$\therefore\ a=7,\ b=4 \quad \therefore\ a-b=7-4=3$

4. $f : (x, y) \to (x-2, y+1)$, $g : (x, y) \to (-x, -y)$일 때, 곡선 $y = \sqrt{-x+2}+1$이 $g \circ f$에 의하여 변환된 곡선의 방정식은?

① $y = \sqrt{x-2}-1$　② $y = \sqrt{-x-4}+2$

③ $y = -\sqrt{x}-2$　④ $y = -\sqrt{x}+2$

⑤ $y = -\sqrt{x-2}$

해설

$y = \sqrt{-x+2}+1$ 은 f 에 의하여

$y-1 = \sqrt{-(x+2)+2}+1$

$\therefore y = \sqrt{-x}+2$

다시 g에 의하여 $-y = \sqrt{-(-x)}+2$

$\therefore y = -\sqrt{x}-2$

5. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdots ①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

6. $\dfrac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x+1}$가 x에 관한 항등식이 되도록 실수 $a,\ b,\ c$의 값을 정하였을 때, abc의 값은?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} \cdots ①$$

①의 양변에 $(x-1)^2(x+1)$을 곱하면

$4x^2 = a(x-1)(x+1) + b(x+1) + c(x-1)^2 \cdots ②$

②가 x에 관한 항등식이므로

$x = 1, -1, 0$을 각각 대입하면

$4 = 2b,\ 4 = 4c,\ 0 = -a+b+c$

$\therefore\ a = 3,\ b = 2,\ c = 1$

$\therefore\ abc = 6$

7. 등식 $\dfrac{4}{11} = \dfrac{1}{a + \dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c}}}$$ 에서

$$a + \frac{1}{b + \dfrac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$$ 이므로

$a = 2$ 이고 $\dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c}} = \dfrac{3}{4}$

이 때, $b + \dfrac{1}{c} = \dfrac{4}{3} = 1 + \dfrac{1}{3}$ 이므로 $b = 1,\ c = 3$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$

8. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\dfrac{a+2b}{2a-3b}=1$을 만족할 때, $\dfrac{a^2+ab+2b^2}{(a-b)(a+2b)}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{8}{7}$ ② $\dfrac{8}{9}$ ③ $\dfrac{8}{15}$ ④ $\dfrac{15}{8}$ ⑤ $\dfrac{9}{8}$

해설

$\dfrac{a+2b}{2a-3b}=1$에서 $a+2b=2a-3b$이므로 $a=5b$

$$\therefore \frac{a^2+ab+2b^2}{(a-b)(a+2b)}=\frac{(5b)^2+5b\times b+2b^2}{(5b-b)(5b+2b)}$$

$$=\frac{32b^2}{4b\times 7b}=\frac{32b^2}{28b^2}=\frac{8}{7}$$

9. $x = a + \dfrac{1}{a}$ 일 때, $\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-4}+x}$ 의 값을 구하면? (단, $0 < a < 1$)

① $\dfrac{a^2}{2(a^2+1)}$　② $\dfrac{2}{a^2+1}$　③ $\dfrac{a^2+1}{2}$
④ $\dfrac{a^2+1}{2a^2}$　⑤ $\dfrac{a}{2(a^2+1)}$

해설

$$x^2 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

$$x^2 - 4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2-4} = -a + \frac{1}{a} (\because\ 0 < a < 1)$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{1}{x(\sqrt{x^2-4}+x)}$$

$$= \frac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left\{\left(-a+\frac{1}{a}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}}$$

$$= \frac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{2}{a}\right)} = \frac{a^2}{2(a^2+1)}$$

10. 분수함수 $y=\dfrac{x+k-1}{x-1}$ $(k \neq 0)$ 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 않은 것은?

① 치역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.

② $(1,\ 1)$ 에 대하여 대칭이다.

③ $|k|$가 클수록 곡선은 $(1,\ 1)$ 에 가까워진다.

④ 점근선은 $x=1$, $y=1$ 이다.

⑤ $y=-x+2$ 에 대하여 대칭이다.

해설

① 정의역은 $x \neq 1$ 인 실수, 치역은 $y \neq 1$ 인 실수
② 점근선의 교점인 $(1,\ 1)$ 에 대해 대칭이다.
③ $|k|$가 커질 수록 $(1,\ 1)$에 멀어진다.
⑤ 기울기가 ± 1이고 $(1,\ 1)$을 지나는 직선에 대칭이다.

11. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y=\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x}+1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 m 만큼,y 축의 방향으로
n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\dfrac{1}{x-m}+1+n$이 식이
$y=\dfrac{-x+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-1$ 과 같으므로
$m=2,\ 1+n=-1$ 에서 $n=-2$
$\therefore\ m-n=4$

12. 분수함수 $f(x)=\frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1,\ 2a)$ 를 지날 때, $1\le x\le 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

분수함수 $f(x)=\frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1,\ 2a)$ 를 지나므로

$2a=\frac{a}{a-1}$, $2a^2-3a=0$, $a(2a-3)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}(\because a\ne 0)$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2x}$ 이므로 $1\le x\le 3$ 에서

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 $f(1)=\frac{3}{2}$ 을 가진다.

13. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(d>0)$ 와 $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f\circ g)(x)=x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x=m, y=n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ $-\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f\circ g=I$ 이므로

$g=f^{-1}$ 또는 $g^{-1}=f$

$y=g(x)$ 의 역함수를 구하면

$y=\dfrac{x+2}{3x+4}\Leftrightarrow 3yx+4y=x+2$

$\Leftrightarrow (3y-1)x=-4y+2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4y+2}{3y-1}$

$\therefore y=g^{-1}(x)=\dfrac{-4x+2}{3x-1},$

$$\begin{aligned} f(x)&=g^{-1}(x)\\ &=\frac{-4x+2}{3x-1}\\ &=\frac{ax+b}{cx+d}(d>0)\text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{4x-2}{-3x+1}\\ &=\frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}\\ &=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m=\dfrac{1}{3}$, $n=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m+n=-1$

14. $1 \le x \le a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

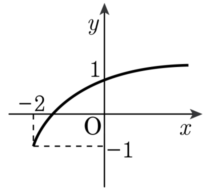
▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$1 \le x \le a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

15. 함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$　② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$

③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$　④ $(-\sqrt{2},\ 0)$

⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프는
함수 $y=a\sqrt{x}$의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b=2$, $c=-1$
$\therefore\ y=a\sqrt{x+b}+c=a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1=a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ a=\sqrt{2}$
따라서, 함수 $y=\sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0=\sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$
$\sqrt{x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$x+2=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$

16. $y = \sqrt{x-1} + 2$의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2(x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x - 1$

$\therefore\ x = y^2 - 4y + 5\ (y \geq 2)$

x와 y를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$

17. $a+b+c=0,\ a^2+b^2+c^2=2,\ abc=3$일 때, $\dfrac{1}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$의 값은?

① $-\dfrac{1}{9}$　② $-\dfrac{2}{9}$　③ $-\dfrac{1}{3}$　④ $-\dfrac{4}{9}$　⑤ $-\dfrac{3}{5}$

해설

$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+c^3-3abc+3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=9$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2$

$\therefore\ ab+bc+ca=-1$

$\therefore$ (준식)$=\dfrac{1}{9}+\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{9}$

18. $\dfrac{2b+3c}{a}=\dfrac{3c+a}{2b}=\dfrac{a+2b}{3c}=k$라 할 때, k의 값으로 가능한 것을 모두 고르면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

(분모의 합)$=a+2b+3c$

ⅰ) $a+2b+3c=0$일 때

$2b+3c=-a$, $3c+a=-2b$, $a+2b=-3c$이므로

주어진 식에 각각 대입하면

$$\frac{-a}{a}=\frac{-2b}{2b}=\frac{-3c}{3c}=k$$

$\therefore\ k=-1$

ⅱ) $a+2b+3c\neq 0$일 때

$$k=\frac{2b+3c}{a}=\frac{3c+a}{2b}=\frac{a+2b}{3c}$$

$$=\frac{2a+4b+6c}{a+2b+3c}\ (\because \text{가비의 리})$$

$$=\frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c}=2$$

ⅰ), ⅱ)에서 $k=-1$ 또는 $k=2$

19. 지난 해 어느 대학의 입학시험 결과 수험생의 남녀의 비는 $8:5$, 합격자의 남녀의 비는 $7:4$, 불합격자의 남녀의 비는 $3:2$ 이었다. 이 때, 전체 합격률은?

① $\dfrac{9}{26}$ ② $\dfrac{4}{13}$ ③ $\dfrac{9}{26}$ ④ $\dfrac{5}{13}$ ⑤ $\dfrac{11}{26}$

해설

	남	여	전체
합격자	$7b$	$4b$	$11b$
불합격자	$3c$	$2c$	$5c$
수험생	$8a$	$5a$	$13a$

$7b+3c=8a \cdots$ ㉠

$4b+2c=5a \cdots$ ㉡

㉠ $\times 2 -$ ㉡ $\times 3$

$a=2b$

(전체 합격률)$=\dfrac{11b}{13a}=\dfrac{11b}{26}b=\dfrac{11}{26}$

20. $< x >= x - [x]$ 라 할 때,

$< \sqrt{3+2\sqrt{2}} > - \dfrac{1}{< \sqrt{3+2\sqrt{2}} >}$ 의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ -1

④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}$

$= \sqrt{2}+1 = x$라 하자.

$[x] = 2$, $< x >= \sqrt{2}-1$

(준식) $= (\sqrt{2}-1) - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$= \sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1) = -2$

21. $0 < a < 1$이고, $x = \dfrac{1+a^2}{a}$일 때, $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$의 값을 구하면?

① a^2 ② a ③ $\dfrac{1}{a}$ ④ $a-1$ ⑤ $a+1$

해설

$$x+2 = \frac{1+a^2}{a} + 2 = \frac{1}{a}(a+1)^2$$

$$\therefore\ \sqrt{x+2} = \frac{|a+1|}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}}$$

$$x-2 = \frac{1+a^2}{a} - 2 = \frac{(a-1)^2}{a}$$

$$\therefore\ \sqrt{x-2} = \frac{|a-1|}{\sqrt{a}} = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \frac{\dfrac{a+1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}}{\dfrac{a+1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}}$$

$$= \frac{(a+1)+(1-a)}{(a+1)-(1-a)} = \frac{1}{a}$$

22. 함수 $f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$$= \frac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1} = -\frac{4}{3}$$

$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1} = 1$

$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$\therefore f_4 = f_1,\ f_5 = f_2,\ f_6 = f_3, \cdots$

$\therefore f_{3n+1} = f_1,\ f_{3n+2} = f_2,\ f_{3n} = f_3$

$100 = 3 \times 33 + 1$ 이므로

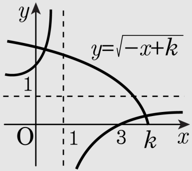
$\therefore\ f_{100}(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

23. 함수 $y=\dfrac{x-3}{x-1}$과 $y=\sqrt{-x+k}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

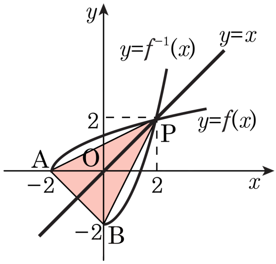
$y=\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{-2}{x-1}+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y=\sqrt{-x+k}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k\geq 3$이어야 하므로 k의 최솟값은 3이다.

24. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+2}$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프와 x축이 만나는 점을 A, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프와 y축이 만나는 점을 B라 하자. $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 교점을 P라고 할 때, 삼각형 ABP 의 넓이를 구하면?



① 5　　② 6　　③ $4\sqrt{2}$

④ 8　　⑤ 10

해설

$y = f(x) = \sqrt{x+2}$ 의 정의역은 $\{x \mid x \ge -2\}$, 치역은 $\{y \mid y \ge 0\}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $x = \sqrt{y+2}$

y 에 관하여 정리하면 $y = x^2 - 2$

따라서 $y = f^{-1}(x) = x^2 - 2$ 이고,

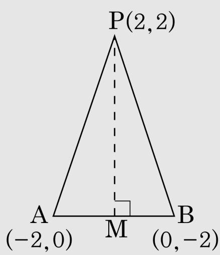
정의역은 $\{x \mid x \ge 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \ge -2\}$

이때, $y = f(x)$ 와

$y = f^{-1}(x)$ 의 교점은

$y = f(x)$ 와 $y = x$ 의

교점과 같다.



$\sqrt{x+2} = x,\ x+2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$,

$x = 2$ 또는 $x = -1$

$\therefore x = 2,\ y = 2(\because x > 0)$

$\therefore$ P$(2,\ 2)$

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면 M $(-1,\ -1)$

$\triangle$ABP는 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 인 이등변삼각형이므로

$\overline{AB} \perp \overline{PM}$ 이다.

$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\overline{PM} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

따라서 $\triangle$ABP 의 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$

25. $\sqrt{x+2} = x+k$가 서로 다른 두 개의 근을 가질 때 실수 k 의 값의 범위는 ? (단, k 는 상수)

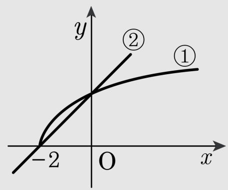
① $2 < k < \frac{9}{4}$ ② $2 \le k < \frac{9}{4}$ ③ $k > \frac{9}{4}$

④ $k < 2$ ⑤ $2 < k \le \frac{9}{4}$

해설

$y = \sqrt{x+2} \cdots\cdots\cdots$ ①

$y = x+k \cdots\cdots\cdots$ ② 라 하면



그림에서 ②의 그래프는 기울기가 1 이고

k 값의 변화에 따라 달라진다.

그런데 곡선 ①과 직선 ②가 서로 접하는 경우는

$\sqrt{x+2} = x+k \rightarrow x+2 = (x+k)^2 \rightarrow x^2+2kx+k^2-x-2 = 0$

$\rightarrow x^2 + (2k-1)x + k^2 - 2 = 0 \cdots\cdots\cdots$ ③

①, ②가 서로 접하려면 ③의 $\mathrm{D} = 0$ 이어야 한다.

$\therefore (2k-1)^2 - 4(k^2-2) = 0,\ 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 8 = 0$

$-4k + 9 = 0,\ 4k = 9$

$\therefore k = \frac{9}{4}$

또 직선 ②가 $(-2,\ 0)$ 을 지날 경우

$0 = -2 + k$

$\therefore k = 2$

따라서 구하는 k 의 범위는 $2 \le k < \frac{9}{4}$