

1. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{20} 의 값은?

- ① 38 ② 39 ③ 41 ④ 42 ⑤ 43

해설

$$\begin{aligned} a_{20} &= S_{20} - S_{19} \\ S_{20} &= 20^2 + 40 - 1 = 439, \\ S_{19} &= 19^2 + 38 - 1 = 398 \\ \therefore a_{20} &= 439 - 398 = 41 \end{aligned}$$

2. 등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차를 d 로 놓으면
305는 제 102항이므로

$$305 = 2 + (102 - 1)d$$

$$\therefore d = \frac{303}{101} = 3$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

4. 수열 $1, -10, 10^2, -10^4, \dots$ 은 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열이다. 이 때, $a+r$ 의 값은?

- ① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$$a = 1, r = -10$$

$$\therefore a + r = -9$$

5. 세 수 a , $a+2$, $2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은?
(단, $a > 0$)

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

세 수 a , $a+2$, $2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(a+2)^2 = a(2a+1)$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a+1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

6. 제 4항이 -16, 제 7항이 128인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

- ① $\frac{1}{3}(2^{20} - 1)$ ② $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$ ③ $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$
④ $2(1 - 2^{20})$ ⑤ $2(1 + 2^{20})$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = -16, ar^6 = 128$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2, a = 2$$

$$S_{20} = \frac{2\{1 - (-2)^{20}\}}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{2}{3}(1 - 2^{20})$$

7. 다음 중 옳은 것은?

① $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 5) = \sum_{k=1}^n (3k - 5)$

② $2 + 4 + 6 + \dots + 2(n + 1) = \sum_{k=1}^n 2(k + 1)$

③ $3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k + 1)$

④ $4 + 5 + 6 + \dots + (n + 3) = \sum_{k=1}^n (k + 3)$

⑤ $3 + 4 + 5 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$

해설

① $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 5) = \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2)$

② $2 + 4 + 6 + \dots + 2(n + 1) = \sum_{k=1}^{n+1} 2n$

③ $3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1)$

⑤ $3 + 4 + 5 + \dots + n = \sum_{k=1}^{n-2} (k + 2)$

8. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 &= (\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2) - \sum_{k=1}^{10} k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 \\ &= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470\end{aligned}$$

9. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{n}{2n+1}$

④ $\frac{n}{n+2}$

⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{준식)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right\} + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

10. 다음 수열에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.

1, 2, 4, 7, 11, a , b , ...

▶ 답:

▷ 정답: 38

해설

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22

√ √ √ √ √ √
1 2 3 4 5 6

∴ $a = 16$, $b = 22$

$a + b = 16 + 22 = 38$

11. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9 \log_3 2$

② $10 \log_3 2$

③ $11 \log_3 2$

④ 9

⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

$a_1 = 1$, $r = \frac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$$

$$\therefore \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9 \log_3 3 = 9$$

12. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$ 를 $4^{\frac{m}{n}}$ 으로 나타낼때, $m+n$ 의 값은? (단, m, n 은 서로소인 자연수)

- ① 21 ② 22 ③ 39 ④ 41 ⑤ 49

해설

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} &= \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

또한, $2\sqrt[3]{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = (2^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18} + \frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}} \\ \therefore m &= 36, n = 13 \\ \therefore m+n &= 49\end{aligned}$$

13. $x > y > 0$ 일 때, $\frac{x^y y^x}{y^y x^x}$ 를 간단히 하면?

① $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

② $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}$

③ 1

④ $\left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$

⑤ $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$$

14. $a = 5 \times 729^x$ 일 때, 27^x 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$$

$$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$$

$$\therefore 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

15. $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$ 라고 할 때, $\log_8 125$ 를 a , b 로 나타내면?

① $1 - 2b$

② $2b - a$

③ $a - b$

④ $\frac{b}{a}$

⑤ $\frac{a}{b}$

해설

$$\begin{aligned} \log_3 2 = a & \quad \log_3 5 = b \\ \log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5 \\ &= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

16. $a_5 = 31$, $a_{11} = 13$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

- ① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 31$$

$$a_{11} = a + 10d = 13$$

$$6d = -18$$

$$d = -3$$

$$\therefore a = 31 + 4 \cdot 3 = 43$$

$$\therefore a_n = 43 + (n-1) \times (-3)$$

$$= -3n + 46$$

$-3n + 46 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$46 < 3n$$

$$15.\overline{3} < n$$

$$\therefore n = 16$$

17. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 두 등차수열 $\{2a_n\}$, $\{3a_n + 2\}$ 의 공차의 합은?

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$$a_{n+1} - a_n = 2$$

수열 $\{2a_n\}$ 의 공차를 d_1 이라 하면

$$d_1 = 2a_{n+1} - 2a_n = 2(a_{n+1} - a_n) = 2 \times 2 = 4$$

수열 $\{3a_n + 2\}$ 의 공차를 d_2 이라 하면

$$d_2 = (3a_{n+1} + 2) - (3a_n + 2) = 3(a_{n+1} - a_n) = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore d_1 + d_2 = 4 + 6 = 10$$

18. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = 11$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$ 일 때, a_{50} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1)d \text{라고 하면} \\ a_4 + a_7 + a_{10} &= 3a + 18d = 11 \\ a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} &= 5a + 35d = 20 \\ \therefore a &= \frac{5}{3}, d = \frac{1}{3} \\ \therefore a_{50} &= 18 \end{aligned}$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ 이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, a_{100} 의 값을 구하면?

- ① 2^{10} ② 2^{20} ③ 2^{40} ④ 2^{80} ⑤ 2^{100}

해설

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n &= 0 \text{ 에서} \\ a_{n+2} - a_{n+1} &= 2(a_{n+1} - a_n) \\ a_{n+1} - a_n &= b_n \text{ 으로 놓으면 } b_{n+1} = 2b_n \\ \text{이때, 수열 } \{b_n\} \text{ 은 수열 } \{a_n\} \text{ 의 계차수열이므로} \\ a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ a_n &= 2^n \\ \therefore a_{100} &= 2^{100} \end{aligned}$$

20. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ 이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 □을 더하면
 $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + \square = (k + 1)^2$ 이므로
 $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $2k + 1$

② $2k - 1$

③ $2k$

④ $k + 1$

⑤ $k - 1$

해설

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $2k + 1$ 을 더하면
 $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + 2k + 1 = (k + 1)^2$ 이므로
 $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

21. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\log_4(a+2b) + \log_4\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & \log_4(a+2b) + \log_4\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \log_4\left(\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} + 4\right) \end{aligned}$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 4$$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$$\log_4(4+4) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

22. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 1.08$ 의 값을 계산하면?

① 0.0327

② 0.0329

③ 0.0331

④ 0.0333

⑤ 0.0335

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 1.08 &= \log_{10} (2^2 \times 3^3 \div 100) \\ &= 2\log^2 + 3\log^3 - 2 \\ &= 0.0333\end{aligned}$$

23. $a_n = \log \frac{n}{n+1}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{99} a_k$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \log \frac{n}{n+1} = \log n - \log(n+1) \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^{99} a_k &= \sum_{k=1}^{99} \{\log k - \log(k+1)\} \\ &= (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + \cdots + (\log 99 - \log 100) \\ &= \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2 \end{aligned}$$

24. 연이율 5%의 복리로 이자를 계산하는 정기예금에 1000만 원을 20년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라. (단, $\log 1.05 = 0.02$, $\log 2.51 = 0.40$ 으로 계산한다.)

- ① 2100만원 ② 2110만원 ③ 2130만원
④ 2150만원 ⑤ 2170만원

해설

1000만 원을 20년 동안 연이율의 5%의 복리로 예금하였을 때의 원리합계는

$$1000(1 + 0.05)^{20} = 1000 \times 1.05^{20} \text{ (만원)}$$

1.05^{20} 에 상용로그를 취하면

$$\log 1.05^{20} = 20 \log 1.05 = 20 \times 0.02 = 0.4$$

이때, $\log 2.51 = 0.40$ 이므로 $1.05^{20} = 2.51$

따라서 구하는 원리합계는 $1000 \times 2.51 = 2150$ (만원)

25. 다음 글을 읽고 물음에 답하여라.

가로등의 밝기를 A , 가로등에서 x m 떨어진 곳에서의 가로등의 밝기를 B 라 하면 $B = A \cdot a^x$ ($a > 0$ 인 상수)인 관계가 성립한다. 이때 가로등에서 나오는 광선이 대기 중을 지나 원래 밝기의 0.05(5%)로 감소되는 투과 거리를 시정이라고 하고 km 단위, 또는 m 단위로 나타낸다.

어느 안개 낀 지역의 시정이 200m일 때, 가로등의 밝기가 50%로 어두워지는 곳은 가로등으로부터 약 몇 m 떨어진 곳인가? (단, $\log 2 = 0.3$ 이고 안개의 밀도는 일정하다.)

- ① 46 ② 70 ③ 86 ④ 100 ⑤ 120

해설

시정의 정의에 따라 $A \cdot a^{200} = 0.05A$

따라서 $a^{200} = 0.05$ 이므로 $a = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{200}}$

가로등의 밝기가 50%로 어두워지는 곳까지의 거리를 p m라고

하면 $a^p = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{p}{200}} = \frac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면 $\frac{p}{200} \log 20 = \log 2$

$p = 200 \frac{\log 2}{\log 20} = \frac{200 \times 0.3}{1 + 0.3} = 46.15 \times \times \times$

따라서 약 46m