

1. 등차수열 2, 5, 8, 11, ...의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구하면?

① $n(3n+2)$

② $\frac{1}{2}n(3n+1)$

③ $\frac{1}{3}n(n+3)$

④ $n(2n-1)$

⑤ $\frac{1}{2}n(n+1)$

해설

$a = 2$, $d = 5 - 2 = 3$ 이므로

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1) \cdot d\}}{2} \text{에 대입하면}$$

$$= \frac{n\{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3\}}{2}$$

$$= \frac{n(4 + 3n - 2)}{2}$$

$$= \frac{n(3n + 1)}{2}$$

2. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$$\begin{aligned} & a_n \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공차를 } d \text{ 라 하면} \\ & a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32 \\ & \therefore 4a + 48d = 32 \\ & a + 12d = 8 \\ & S_{25} = \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ & = \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ & = 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

3. 제 3 항이 12이고 제 6 항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = 12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2$$

$$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

4. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 : a_3 = 4 : 9$ 이고, $a_2 = 4$ 일 때, a_5 의 값은?

① $\frac{11}{2}$

② 7

③ $\frac{19}{2}$

④ 12

⑤ $\frac{27}{2}$

해설

공비를 r 이라고 하면

$$a_1 : a_3 = a_1 : a_1 r^2 = 1 : r^2 \text{ 이므로}$$

$$1 : r^2 = 4 : 9 \text{ 에서}$$

$$r^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = a_1 r = 4 \text{ 에서 } \frac{3}{2} a_1 = 4 \quad \therefore a_1 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore a_5 = a_1 r^4 = \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{27}{2}$$

5. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{ (\omega^2)^{36} - 1 \}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

6. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

- ① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \cdot \sum_{j=1}^{10} j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) \\ &= 385 \end{aligned}$$

7. $\sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5

② -7

③ -8

④ -79

⑤ -80

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{80} - \sqrt{81} \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{81} \\ &= 1 - 9 = -8 \end{aligned}$$

8. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

④ $\frac{n}{2n+1}$

⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right\} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

9. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

$$\therefore a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$$

10. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

11. 16의 네제곱근 중 음수인 것을 a , -27 의 세제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -12

② -6

③ 6

④ 12

⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은

$$-\sqrt[4]{16} = -2 \quad \therefore a = -2$$

-27 의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3 = -27, \quad (x+3)(x^2-3x+9) = 0$$

이때, -27 의 세제곱근 중 실수인 것은 -3 이다.

$$\therefore b = -3$$

$$\therefore ab = (-2) \times (-3) = 6$$

12. 양의 실수 a 에 대하여 $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$ 의 값은?(단, $a \neq 1$)

- ① $\sqrt[5]{a}$ ② $\frac{1}{\sqrt[5]{a}}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ ⑤ $\sqrt[3]{a}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \end{aligned}$$

13. $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 2^p \cdot 3^q$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \\ &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3} \\ &= 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \\ &= \left(3 + 2 + \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3} \\ &= \frac{16}{3}\sqrt[3]{3} = 2^4 \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \\ &\therefore p = 4, \quad q = -\frac{2}{3} \quad \therefore p + q = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

14. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 에서

$$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$$

$$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$$

15. $3^x = 2 + \sqrt{2}$, $3^y = 2 - \sqrt{2}$ 일 때, $x + y$ 의 값은?

① 1

② $\log_4 3$

③ $\log_3 2$

④ $\log_3 4$

⑤ $\log_4 10$

해설

$x = \log_3(2 + \sqrt{2})$, $y = \log_3(2 - \sqrt{2})$ 이므로

$x + y = \log_3 \{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})\} = \log_3 2$

16. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + 3$ 을 일차식 x , $x-1$, $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 순서대로 등비수열을 이룰 때, 상수 a 의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 + ax + 3$ 을 일차식 x , $x-1$, $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(0) = 3$, $f(1) = 4 + a$, $f(2) = 7 + 2a$ 이고, 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(4 + a)^2 = 3(7 + 2a)$$

$$a^2 + 2a - 5 = 0$$

이때, a 는 이 이차방정식의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 상수 a 의 값의 합은 -2 이다.

17. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3, a_{n+1} = 2S_n$ 으로 정의될 때, a_{10} 의 값은? (단, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$)
- ① $3 \cdot 2^8$ ② $3 \cdot 2^9$ ③ $3 \cdot 2^{10}$
④ $2 \cdot 3^9$ ⑤ $2 \cdot 3^{10}$

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로 $S_{n+1} - S_n = 2S_n$
즉, $S_{n+1} = 3S_n$ 이므로 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 3 인 등비수열이다.
 $\therefore S_n = 3^n$
 $a_{10} = S_{10} - S_9 = 3^{10} - 3^9 = 2 \cdot 3^9$

해설

$a_1 = 3, a_2 = 6$
 $a_{n+1} = 2S_n \cdots \textcircled{1}, a_n = 2S_{n-1} \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 식에서 $\textcircled{2}$ 식을 빼보면,
 $a_{n+1} - a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n$ (단, $n \geq 2$)
 $a_{n+1} = 3a_n$ (단, $n \geq 2$)
따라서 $a_n = 3^{n-2} \cdot a_2 = 2 \cdot 3^{n-1}$ (단, $n \geq 2$)
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$

18. 다음 등식이 성립하도록 하는 c 의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 360

해설

$$\begin{aligned} \sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 &= \sum_{k=11}^{100} (k^2 - 4k + 4) \\ &= \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + \sum_{k=11}^{100} 4 \\ \therefore c &= \sum_{k=11}^{100} 4 = 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 90 = 360 \end{aligned}$$

19. 수열 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, ...의 일반항 a_n 은?

- ① $2^{n-2} + 2$
- ② $2^{n-1} - 1$
- ③ $2^{n-1} + 2$
- ④ $2^{n+1} - 2$
- ⑤ $2^{n+1} + 2$

해설

주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, \dots$
 $\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$
 $\{a_n\} : 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32, \dots$
즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로
 $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$
 $\therefore a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$
 $= 3 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$
 $= 2^{n-1} + 2$

20. $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n + 2$, $a_{2n+1} = a_n - 3$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{30} 의 값은?

① -9

② -6

③ -2

④ 3

⑤ 5

해설

$$a_{2n} = a_n + 2, \quad a_{2n+1} = a_n - 3$$

$$a_{30} = a_{15} + 2 = (a_7 - 3) + 2 = a_7 - 1$$

$$= (a_3 - 3) - 1 = a_3 - 4 = (a_1 - 3) - 4$$

$$= a_1 - 7 = -6$$

21. $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}})$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ $\frac{3}{2}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}})$$

$$= \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)$$

$$= \log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2} = \log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{\frac{3}{2}} = 3$$

22. 세 수 $3\log_3 3$, $\log_2 3$, $2\log_2 4$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $2\log_2 4 < 3\log_3 3 < \log_2 3$ ② $\log_2 3 < 2\log_2 4 < 3\log_3 3$
③ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$ ④ $3\log_3 3 < 2\log_2 4 < \log_2 3$
⑤ $3\log_3 3 < \log_2 3 < 2\log_2 4$

해설

$$\begin{aligned} 3\log_3 3 &= 3 \\ \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 &\quad \therefore 1 < \log_2 3 < 2 \\ 2\log_2 4 &= 4 \\ \therefore \log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4 \end{aligned}$$

23. $\log 0.008$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $x + 10^y$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\log 0.008 &= \log 8 - \log 1000 \\ &= \log 8 - 3 = -3 + \log 8 \\ \text{따라서 } x &= -3 \text{ 이고, } y = \log 8 \text{ 이므로} \\ x + 10^y &= -3 + 10^{\log 8} = -3 + 8 = 5\end{aligned}$$

24. 다음 두 조건을 만족하는 양수 x 의 값을 모두 곱하면 10^k 이다. 이때, k 의 값은?

- x 는 세 자리 정수이다.
- $\log x^2$ 와 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수부분은 같다.

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

x 의 정수부분이 세 자리이므로 $\log x$ 의 정수부분은 2이다.

$$2 \leq \log x < 3 \cdots \textcircled{1}$$

$\log x^2$ 과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수부분이 같으므로 $\log x^2 - \log \frac{1}{x}$ 의 값은 정수이어야 한다.

$$\log x^2 - \log \frac{1}{x} = 2 \log x + \log x = 3 \log x (\text{정수})$$

①에 의하여 $6 \leq 3 \log x < 9$ 이므로

$$3 \log x = 6 \text{ 또는 } 3 \log x = 7 \text{ 또는 } 3 \log x = 8$$

$$\log x = 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{7}{3} \text{ 또는 } \log x = \frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } 10^2 \cdot 10^{\frac{7}{3}} \cdot 10^{\frac{8}{3}} = 10^{2+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}} = 10^7$$

$$\therefore k = 7$$

25. *Richter*는 지진의 규모를 M , 지진의 진앙지로부터 100km 떨어진 곳에서 측정한 지진의 강도를 I 라 할 때, $M = \log_{10} \frac{I}{S}$ (단, S 는 상수)로 나타내기로 했다. 지난 5월 12일 중국 쓰촨성에서 발생한 지진의 규모가 8.0이었고, 도호쿠 지진의 강도는 7.2이었다. 이때, 쓰촨성 지진의 강도는 도호쿠 지진의 강도의 몇 배인가?

<상용로그표>

수	0	1	2	3	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	...
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	...
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	...
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- ① 6.15
- ② 6.20
- ③ 6.26
- ④ 6.31
- ⑤ 6.35

해설

쓰촨성 지진의 강도를 I_1 , 도호쿠의 지진의 강도를 I_2 라 하면

$$\log_{10} \frac{I_1}{S} = 8.0 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$\log_{10} \frac{I_2}{S} = 7.2 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} - \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } \log_{10} \frac{I_1}{I_2} = 0.8 = \log_{10} 6.31$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = 6.31$$