1. 등차수열 2, 5, 8, 11, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하면?

① $n(3n+2)$ ② $\frac{1}{2}n(3n+1)$ ③ $\frac{1}{3}n(n+3)$

④ $n(2n-1)$ ⑤ $\frac{1}{2}n(n+1)$

해설

$a=2,\ d=5-2=3$이므로

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)\cdot d\}}{2}$ 에 대입하면

$=\dfrac{n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 3\}}{2}$

$=\dfrac{n(4+3n-2)}{2}$

$=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

2. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$S_{25} = \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} = \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} = 25 \times 8 = 200$$

3. 제 3항이 12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$　　② $(-3) \cdot 2^{n-1}$　　③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$　　⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = -8$

$\therefore r = -2$

$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

4. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 : a_3 = 4 : 9$이고, $a_2 = 4$일 때, a_5의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② 7 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{27}{2}$

해설

공비를 r이라고 하면

$a_1 : a_3 = a_1 : a_1 r^2 = 1 : r^2$이므로

$1 : r^2 = 4 : 9$에서

$r^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore \ r = \frac{3}{2}$

$a_2 = a_1 r = 4$에서 $\frac{3}{2} a_1 = 4 \quad \therefore \ a_1 = \frac{8}{3}$

$\therefore \ a_5 = a_1 r^4 = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{27}{2}$

5. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3=1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S=\frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36}-1\right\}}{\omega^2-1}=\frac{\omega(\omega^{72}-1)}{\omega^2-1}$$

이때, $\omega^3=1$ 이므로

$$\omega^{72}=(\omega^3)^{24}=1^{24}=1$$

$$\therefore\ S=\frac{\omega(\omega^{72}-1)}{\omega^2-1}=\frac{\omega(1-1)}{\omega^2-1}=0$$

6. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　② 550　③ 1100　④ 1150　⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10}j\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(385+385)$$
$$=385$$

7. $\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5 ② -7 ③ -8 ④ -79 ⑤ -80

해설

$\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$
$=\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{80}-\sqrt{81}$
$=\sqrt{1}-\sqrt{81}$
$=1-9=-8$

8. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$　② $\dfrac{n}{n+1}$　③ $\dfrac{2n}{n+1}$
④ $\dfrac{n}{2n+1}$　⑤ $\dfrac{2n}{2n+3}$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

9. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 5$

$\therefore\ a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$

10. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

11. 16의 네제곱근 중 음수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, ab의 값은?

① -12 ② -6 ③ 6 ④ 12 ⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은
$-\sqrt[4]{16}=-2 \quad \therefore\ a=-2$
-27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-27, \quad (x+3)(x^2-3x+9)=0$
이때, -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.
$\therefore\ b=-3$
$\therefore ab=(-2)\times(-3)=6$

12. 양의 실수 a에 대하여 $\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$의 값은?(단, $a \neq 1$)

① $\sqrt[10]{a}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$ ③ 1 ④ $\dfrac{1}{\sqrt[15]{a}}$ ⑤ $\sqrt[10]{a}$

해설

$$\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[15]{a}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}}$$

13. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=2^p\cdot 3^q$ 일 때, $p+q$의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

$$=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}+\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 3}$$

$$=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$$

$$=\left(3+2+\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt[3]{3}=2^4\cdot 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore p=4,\ q=-\frac{2}{3}\qquad \therefore p+q=\frac{10}{3}$$

14. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

15. $3^x = 2 + \sqrt{2}$, $3^y = 2 - \sqrt{2}$일 때, $x + y$의 값은?

① 1　　② $\log_4 3$　　③ $\log_3 2$

④ $\log_3 4$　　⑤ $\log_4 10$

해설

$x = \log_3(2+\sqrt{2})$, $y = \log_3(2-\sqrt{2})$이므로

$x + y = \log_3\left\{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})\right\} = \log_3 2$

16. 다항식 $f(x)=x^2+ax+3$을 일차식 $x,\ x-1,\ x-2$로 나누었을 때의 나머지가 순서대로 등비수열을 이룰 때, 상수 a의 값의 합은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f(x)=x^2+ax+3$을 일차식 $x,\ x-1,\ x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(0)=3,\ f(1)=4+a,\ f(2)=7+2a$이고, 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(4+a)^2=3(7+2a)$

$a^2+2a-5=0$

이때, a는 이 이차방정식의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 상수 a의 값의 합은 -2이다.

17. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2S_n$으로 정의될 때, a_{10}의 값은? (단, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$)

① $3 \cdot 2^8$ ② $3 \cdot 2^9$ ③ $3 \cdot 2^{10}$

④ $2 \cdot 3^9$ ⑤ $2 \cdot 3^{10}$

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이므로 $S_{n+1} - S_n = 2S_n$

즉, $S_{n+1} = 3S_n$이므로 $\{S_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이다.

$\therefore\ S_n = 3^n$

$a_{10} = S_{10} - S_9 = 3^{10} - 3^9 = 2 \cdot 3^9$

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 6$

$a_{n+1} = 2S_n \cdots$ ㉠, $a_n = 2S_{n-1} \cdots$ ㉡

㉠식에서 ㉡식을 빼보면,

$a_{n+1} - a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n$(단, $n \geq 2$)

$a_{n+1} = 3a_n$(단, $n \geq 2$)

따라서 $a_n = 3^{n-2} \cdot a_2 = 2 \cdot 3^{n-1}$(단, $n \geq 2$)

$\therefore\ a_{10} = 2 \cdot 3^9$

18. 다음 등식이 성립하도록 하는 c의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100}(k-2)^2=\sum_{k=11}^{100}k^2-4\sum_{k=11}^{100}k+c$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 360

해설

$$\sum_{k=11}^{100}(k-2)^2=\sum_{k=11}^{100}(k^2-4k+4)$$
$$=\sum_{k=11}^{100}-4\sum_{k=11}^{100}k+\sum_{k=11}^{100}4$$
$$\therefore\ c=\sum_{k=11}^{100}4=4+4+\cdots+4=4\times 90=360$$

19. 수열 $3,\ 4,\ 6,\ 10,\ 18,\ 34,\ 66, \cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① $2^{n-2}+2$　　② $2^{n-1}-1$　　③ $2^{n-1}+2$

④ $2^{n+1}-2$　　⑤ $2^{n+1}+2$

해설

주어진 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 3,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 10,\ \ 18,\ \ 34,\ 66, \cdots$

$\quad\quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$

$\{a_n\} : \ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32, \cdots$

즉, 수열$\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 3 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 3 + \frac{1 \cdot (2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2^{n-1}+2 \end{aligned}$$

20. $a_1 = 1,\ a_{2n} = a_n + 2,\ a_{2n+1} = a_n - 3$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에서 a_{30}의 값은?

① -9 ② -6 ③ -2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$a_{2n} = a_n + 2,\ a_{2n+1} = a_n - 3$

$a_{30} = a_{15} + 2 = (a_7 - 3) + 2 = a_7 - 1$

$= (a_3 - 3) - 1 = a_3 - 4 = (a_1 - 3) - 4$

$= a_1 - 7 = -6$

21. $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$$

$$=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)$$

$$=\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{\frac{3}{2}}=3$$

22. 세 수 $3\log_3 3$, $\log_2 3$, $2\log_2 4$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $2\log_2 4 < 3\log_3 3 < \log_2 3$　② $\log_2 3 < 2\log_2 4 < 3\log_3 3$

③ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$　④ $3\log_3 3 < 2\log_2 4 < \log_2 3$

⑤ $3\log_3 3 < \log_2 3 < 2\log_2 4$

해설

$3\log_3 3 = 3$

$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \quad \therefore \ 1 < \log_2 3 < 2$

$2\log_2 4 = 4$

$\therefore \ \log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$

23. $\log 0.008$ 의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라 할 때, $x+10^y$ 의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$\log 0.008 = \log 8 - \log 1000$

$= \log 8 - 3 = -3 + \log 8$

따라서 $x = -3$ 이고, $y = \log 8$ 이므로

$x + 10^y = -3 + 10^{\log 8} = -3 + 8 = 5$

24. 다음 두 조건을 만족하는 양수 x의 값을 모두 곱하면 10^k이다. 이때, k의 값은?

> · x는 세 자리 정수이다.
> · $\log x^2$와 $\log\frac{1}{x}$의 소수부분은 같다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

x의 정수부분이 세 자리이므로 $\log x$의 정수부분은 2이다.

$2 \le \log x < 3 \cdots$ ㉠

$\log x^2$과 $\log\dfrac{1}{x}$의 소수부분이 같으므로 $\log x^2 - \log\dfrac{1}{x}$의 값은 정수이어야 한다.

$\log x^2 - \log\dfrac{1}{x} = 2\log x + \log x = 3\log x$(정수)

㉠에 의하여 $6 \le 3\log x < 9$이므로

$3\log x = 6$ 또는 $3\log x = 7$ 또는 $3\log x = 8$

$\log x = 2$ 또는 $\log x = \dfrac{7}{3}$ 또는 $\log x = \dfrac{8}{3}$

따라서 $10^2 \cdot 10^{\frac{7}{3}} \cdot 10^{\frac{8}{3}} = 10^{2+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}} = 10^7$

$\therefore\ k = 7$

25. *Richter*는 지진의 규모를 M, 지진의 진앙지로부터 100km 떨어진 곳에서 측정한 지진의 강도를 I라 할 때, $M=\log_{10}\frac{I}{S}$ (단, S는 상수)로 나타내기로 했다. 지난 5월 12일 중국 쓰촨성에서 발생한 지진의 규모가 8.0이었고, 도호쿠 지진의 강도는 7.2이었다. 이때, 쓰촨성 지진의 강도는 도호쿠 지진의 강도의 몇 배인가?

<상용로그표>

수	0	1	2	3	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	⋯
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	⋯
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	⋯
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

① 6.15 ② 6.20 ③ 6.26 ④ 6.31 ⑤ 6.35

해설

쓰촨성 지진의 강도를 I_1, 도호쿠의 지진의 강도를 I_2라 하면

$$\log_{10}\frac{I_1}{S}=8.0\cdots ㉠$$

$$\log_{10}\frac{I_2}{S}=7.2\cdots ㉡$$

㉠−㉡에서 $\log_{10}\frac{I_1}{I_2}=0.8=\log_{10}6.31$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2}=6.31$$