

1. 다음은 n 이 자연수일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^2 = 1, (\text{우변}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$$

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2 + 7k + 4, 2k + 2$

② $2k^2 + 7k + 5, 2k + 2$

③ $2k^2 + 7k + 5, 2k + 3$

④ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 2$

⑤ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 3$

2. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \cdots \textcircled{㉠}$ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

이 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= k^2 + \boxed{\text{(가)}} = \boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{㉠}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k - 1, (k + 1)^2$

② $2k, k + 1$

③ $2k, (k + 1)^2$

④ $2k + 1, k + 1$

⑤ $2k + 1, (k + 1)^2$

3. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{3} =$ (우변) 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 $\textcircled{7}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + [\textcircled{7}] = [\textcircled{8}]$$

즉, $n = k + 1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+1}{2k+3}$

② $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+2}{2k+3}$

③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+1}{2k+3}$

④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+2}{2k+3}$

⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+3}{2k+3}$

4. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n \leq 2^{n-1}(1+3^n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 4, (우변) = $2^{1-1}(1+3) = 4$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$$

양변에 4를 곱하면

$$4^{k+1} \leq \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$$

$$= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$$

$$= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

5. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{(\text{가})} + \frac{1}{(\text{나})} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{2k+(\text{다})} + \frac{1}{2k+(\text{라})}$ 을 더하면

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+(\text{다})} + \frac{1}{2k+(\text{라})}$$

$$> \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+(\text{다})} + \frac{1}{2k+(\text{라})}$$

$$= \frac{13}{24} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+(\text{다})} - \frac{1}{2k+(\text{라})} \right)$$

$$= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k+(\text{다}))} > \frac{13}{24}$$

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?

6. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 부등식 $\frac{5^n + 3^n}{2} \geq 4^n$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{5+3}{2} = 4, (\text{우변}) = 4^1 = 4$$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{5^k + 3^k}{2} \geq \boxed{\text{(가)}}$$

위의 식의 양변에 4를 곱하면

$$4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{\text{(가)}}$$

이므로

$$\frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2}$$

$$= \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \geq 0$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $4^k, 5^k - 3^k$

② $4^{k+1}, 5^k - 3^k$

③ $4^k, 5^k + 3^k$

④ $4^{k+1}, 5^k + 3^k$

⑤ $4^{k+1}, 5^{k+1} - 3^{k+1}$

7. 다음은 $h > 0$ 일 때, $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots \textcircled{7}$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때, $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > \boxed{\text{(가)}}$ 이므로 $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

ii) $n = k (k \geq 2)$ 일 때, $\textcircled{7}$ 이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k = 1 + kh$$

$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\text{(가)}})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{7}$ 은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $\textcircled{7}$ 은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1 + 2h, 1 + kh$

② $1 + 2h, 1 + (k+1)h$

③ $1 + h^2, 1 + kh$

④ $1 + h^2, 1 + (k+1)h$

⑤ $2h + h^2, 1 + kh$