1. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{(가)})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{(나)})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$　② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$
③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$　④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$
⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

해설

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

2. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$
$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$　② $2k,\ k+1$
③ $2k,\ (k+1)^2$　④ $2k+1,\ k+1$
⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

해설

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$
$=k^2+\boxed{2k+1}=\boxed{(k+1)^2}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ (가) $=2k+1$, (나) $=(k+1)^2$

3. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3}=$ (우변)이므로 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k+1}$$
> 위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+[㉠]=[㉡]$$
> 즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
> 따라서, (i),(ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+1}{2k+3}$
② $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+1}{2k+3}$
④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+3}{2k+3}$

해설

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\begin{aligned}(\text{우변})&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$

4. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 4$, (우변)$= 2^{1-1}(1+3) = 4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
> $= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
$= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
$= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

5. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$
이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=2$ 일 때,
(좌변)$=\frac{1}{(\text{가})}+\frac{1}{(\text{나})}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$
$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}$$
양변에 $\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$ 을 더하면
$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$$
$$>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$$
$$=\frac{13}{24}-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+(\text{다})}-\frac{1}{2k+(\text{라})}\right)$$
$$=\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+(\text{다}))}>\frac{13}{24}$$
따라서, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라) 의 값은?

① 7　② 10　③ 13　④ 16　⑤ 19

해설

(i) $n=2$ 일 때,
(좌변)$=\frac{1}{\boxed{3}}+\frac{1}{\boxed{4}}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$
$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}$$
양변에 $\frac{1}{2k+\boxed{1}}+\frac{1}{2k+\boxed{2}}$ 을 더하면
$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+\boxed{1}}+\frac{1}{2k+\boxed{2}}$$
$$>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+\boxed{1}}+\frac{1}{2k+\boxed{2}}$$
$$=\frac{13}{24}-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+\boxed{1}}-\frac{1}{2k+\boxed{2}}\right)$$
$$=\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+\boxed{1})}>\frac{13}{24}$$
따라서, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.
$\therefore$ (가)+(나)+(다)+(라)$=3+4+1+2=10$

6. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $\frac{5^n+3^n}{2} \geq 4^n$이 성립함을 증명하는 과정이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$= \frac{5+3}{2} = 4$, (우변)$= 4^1 = 1$
> 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{(가)}$
> 위의 식의 양변에 4를 곱하면
> $4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{(가)}$
> 이므로
> $\frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2}$
> $= \frac{\boxed{(나)}}{2} \geq 0$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① 4^k, $5^k - 3^k$　② 4^{k+1}, $5^k - 3^k$
③ 4^k, $5^k + 3^k$　④ 4^{k+1}, $5^k + 3^k$
⑤ 4^{k+1}, $5^{k+1} - 3^{k+1}$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{4^k}$

위의 식의 양변에 4를 곱하면

$4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{4^k}$

이므로

$\frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2}$

$= \frac{\boxed{5^k - 3^k}}{2} \geq 0$

따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.

7. 다음은 $h > 0$일 때, $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots$ ㉠이 성립함을 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{\quad (가) \quad}$이므로 ㉠이 성립한다.
> ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
> $(1+h)^k = 1+kh$
> $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\quad (가) \quad})(1+h) > 1+(k+1)h$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
> (i), (ii) 에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1+2h,\ 1+kh$
② $1+2h,\ 1+(k+1)h$
③ $1+h^2,\ 1+kh$
④ $1+h^2,\ 1+(k+1)h$
⑤ $2h+h^2,\ 1+kh$

해설

(i) $n = 2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{\quad 1+2h \quad}$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k = 1+kh$
$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\quad 1+kh \quad})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n = k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.