1. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$ 일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$
따라서, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$
② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$
③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$
④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$
⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

해설

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$
따라서, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

2. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$
$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$
② $2k,\ k+1$
③ $2k,\ (k+1)^2$
④ $2k+1,\ k+1$
⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

해설

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$
$=k^2+\boxed{2k+1}=\boxed{(k+1)^2}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ (가) $=2k+1$, (나) $=(k+1)^2$

3. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3}=$ (우변)이므로 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k+1}$$
위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+[㉠]=[㉡]$$
즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
따라서, (i),(ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+1}{2k+3}$ ② $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+1}{2k+3}$ ④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+3}{2k+3}$

해설

$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$(\text{우변})=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

4. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=4$, (우변)$=2^{1-1}(1+3)=4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
> $=2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
$=2^k(2+2\cdot 3^k)$
$=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

5. 다음은 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1}{(가)}+\dfrac{1}{(나)}=\dfrac{7}{12}>\dfrac{13}{24}$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}$$

양변에 $\dfrac{1}{2k+(다)}+\dfrac{1}{2k+(라)}$을 더하면

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+(다)}+\frac{1}{2k+(라)}$$

$$>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+(다)}+\frac{1}{2k+(라)}$$

$$=\frac{13}{24}-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+(다)}-\frac{1}{2k+(라)}\right)$$

$$=\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+(다))}>\frac{13}{24}$$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

해설

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1}{\boxed{3}}+\dfrac{1}{\boxed{4}}=\dfrac{7}{12}>\dfrac{13}{24}$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}$$

양변에 $\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}+\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}$을 더하면

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+\boxed{1}}+\frac{1}{2k+\boxed{2}}$$

$$>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+\boxed{1}}+\frac{1}{2k+\boxed{2}}$$

$$=\frac{13}{24}-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+\boxed{1}}-\frac{1}{2k+\boxed{2}}\right)$$

$$=\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+\boxed{1})}>\frac{13}{24}$$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가)+(나)+(다)+(라)$=3+4+1+2=10$

6. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $\frac{5^n+3^n}{2} \geq 4^n$이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=\frac{5+3}{2}=4$, (우변)$=4^1=1$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{\text{(가)}}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
$4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{\text{(가)}}$
이므로
$\frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2}$
$= \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \geq 0$
따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $4^k,\ 5^k-3^k$
② $4^{k+1},\ 5^k-3^k$
③ $4^k,\ 5^k+3^k$
④ $4^{k+1},\ 5^k+3^k$
⑤ $4^{k+1},\ 5^{k+1}-3^{k+1}$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{4^k}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
$4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{4^k}$
이므로
$\frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2}$
$= \frac{\boxed{5^k-3^k}}{2} \geq 0$
따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.

7. 다음은 $h > 0$ 일 때, $n \geq 2$ 인 자연수 n에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots$ ㉠ 이 성립함을 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$ 일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{\quad \text{(가)} \quad}$ 이므로 ㉠이 성립한다.
>
> ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
>
> $(1+h)^k = 1+kh$
>
> $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\quad \text{(가)} \quad})(1+h) > 1+(k+1)h$
>
> 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 ㉠은 성립한다.
>
> (i), (ii) 에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$ 인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1+2h,\ 1+kh$

② $1+2h,\ 1+(k+1)h$

③ $1+h^2,\ 1+kh$

④ $1+h^2,\ 1+(k+1)h$

⑤ $2h+h^2,\ 1+kh$

해설

(i) $n = 2$ 일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{\quad 1+2h \quad}$ 이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k = 1+kh$

$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\quad 1+kh \quad})(1+h) > 1+(k+1)h$

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 ㉠은 성립한다.

(i), (ii) 에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$ 인 자연수 n에 대하여 성립한다.