

1. 다음은 n 이 자연수일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{(가)})$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{(나)})$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

- ① $2k^2 + 7k + 4, 2k + 2$
- ② $2k^2 + 7k + 5, 2k + 2$
- ③ $2k^2 + 7k + 5, 2k + 3$
- ④ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 2$
- ⑤ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 3$

2. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + \boxed{(가)}$
 $= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + \boxed{(가)} = \frac{1}{6}k(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
따라서, $n = \boxed{(나)}$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위

의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ① k, k^2

② $k, (k+1)^2$

③ $k+1, k$

④ $(k+1)^2, k$

⑤ $(k+1)^2, k+1$

3. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - \text{㉡} > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

- ① $n = 1, k^2$
- ② $n = 1, (k+1)^2$
- ③ $n = 5, (k-1)^2$
- ④ $n = 5, k^2$
- ⑤ $n = 5, (k+1)^2$

4. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n \leq 2^{n-1}(1+3^n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 4, (우변) = $2^{1-1}(1+3) = 4$ 이므로
주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
 $4^{k+1} \leq \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여
성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$
 ② (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$
 ③ (가) : 2^k , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$
 ④ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$
 ⑤ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

5. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 짝수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

 답: _____

6. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 홀수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

 답: _____

7. 모든 자연수 n 에 대하여 $6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\square$ 안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

$6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수이다.㉠

(i) $n = 1$ 일 때, $6 - 5 - 1 = 0$ 이므로 $\square$ 의 배수이다.
따라서 $n = 1$ 일 때, ㉠이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$ 이 25의 배수이면

$6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \square(6^k - 5k - 1) + 25k$ 는 $\square$ 의 배수이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

 답: _____

8. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때,
(좌변) $= \frac{1}{(가)} + \frac{1}{(나)} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}$
양변에 $\frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$ 을 더하면
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$
 $> \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$
 $= \frac{13}{24} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+(다)} - \frac{1}{2k+(라)} \right)$
 $= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k+(다))} > \frac{13}{24}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?

- ① 7
- ② 10
- ③ 13
- ④ 16
- ⑤ 19