1. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$ ② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$

③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$ ④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$

⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

해설

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

2. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
> 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 더하면
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{\text{(가)}}$
> $=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{\text{(가)}}=\frac{1}{6}k(k+1)\left\{k(2k+1)+6(k+1)\right\}$
> $=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
> 따라서, $n=\boxed{\text{(나)}}$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $k,\ k^2$

② $k,\ (k+1)^2$

③ $k+1,\ k$

④ $(k+1)^2,\ k$

⑤ $(k+1)^2,\ k+1$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots++k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

양변에 $n=\boxed{(k+1)^2}$를 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(k+1)^2}$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(k+1)^2}=\frac{1}{6}k(k+1)\left\{k(2k+1)+6(k+1)\right\}$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

따라서, $n=\boxed{k+1}$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

3. 다음은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$
② $n = 1,\ (k+1)^2$
③ $n = 5,\ (k-1)^2$
④ $n = 5,\ k^2$
⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ ㉠ $n = 5$, ㉡ $(k+1)^2$

4. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=4$, (우변)$=2^{1-1}(1+3)=4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
> $=2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
$=2^k(2+2\cdot 3^k)$
$=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

5. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다.
(ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$이 참임을 증명한다.
k가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=2, \quad b=2$
$\therefore a+b=4$

6. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 홀수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

홀수는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(1)$이 참임을 증명한다.
k가 홀수이면 그 다음 홀수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=1, \quad b=2$
$\therefore a+b=3$

7. 모든 자연수 n에 대하여 $6^n - 5n - 1$은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\boxed{}$안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

> $6^n - 5n - 1$은 25의 배수이다. $\cdots\cdots$ ㉠
>
> (i) $n = 1$일 때, $6 - 5 - 1 = 0$이므로 $\boxed{}$의 배수이다.
> 따라서 $n = 1$일 때, ㉠이 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$이 25의 배수이면
> $6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \boxed{}(6^k - 5k - 1) + 25k$는 $\boxed{}$의 배수이므로 $n = k + 1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
> 따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$25 + 6 + 25 = 56$

8. 다음은 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=2$일 때,
>
> (좌변)$=\dfrac{1}{(\text{가})}+\dfrac{1}{(\text{나})}=\dfrac{7}{12}>\dfrac{13}{24}$
>
> 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
>
> (ii) $n=k(k \geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
>
> $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}$
>
> $\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{k+1}$
>
> 양변에 $\dfrac{1}{2k+(\text{다})}+\dfrac{1}{2k+(\text{라})}$을 더하면
>
> $\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+(\text{다})}+\dfrac{1}{2k+(\text{라})}$
>
> $>\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{2k+(\text{다})}+\dfrac{1}{2k+(\text{라})}$
>
> $=\dfrac{13}{24}-\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{2k+(\text{다})}-\dfrac{1}{2k+(\text{라})}\right)$
>
> $=\dfrac{13}{24}+\dfrac{1}{2(k+1)(2k+(\text{다}))}>\dfrac{13}{24}$
>
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

해설

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1}{\boxed{3}}+\dfrac{1}{\boxed{4}}=\dfrac{7}{12}>\dfrac{13}{24}$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}$

$\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{k+1}$

양변에 $\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}+\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}$을 더하면

$\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}+\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}$

$>\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}+\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}$

$=\dfrac{13}{24}-\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}-\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}\right)$

$=\dfrac{13}{24}+\dfrac{1}{2(k+1)(2k+\boxed{1})}>\dfrac{13}{24}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가)+(나)+(다)+(라)$=3+4+1+2=10$