

1. 첫째항이 6, 공차가 -5인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 -44는 제 몇 항인가?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

첫째항이 6이고, 공차가 5이므로 일반항은 a_n 은

$$a_n = 6 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 11$$

$$-5n + 11 = -44$$

$$5n = 55 \quad \therefore n = 11$$

2. 등차수열 $10, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, -390$ 에서 공차는?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} b_1 &= 10, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots, \\ b_{100} &= a_{99}, b_{101} = -390 \\ \therefore b_{101} &= 10 + (101 - 1) \cdot d = -390 \\ 100d &= -400 \\ \therefore d &= -4 \end{aligned}$$

3. 세 수 $5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 등차수열을 이루면 $4 - x$ 가 등차중항이므로

$$4 - x = \frac{(5 - 2x) + (6 + 3x)}{2}$$

$$2(4 - x) = 5 - 2x + 6 + 3x$$

$$8 - 2x = 11 + x$$

$$-3x = 3 \quad \therefore x = -1$$

4. 조화수열 12, 6, 4, 3, ...의 일반항은?

- ① $\frac{12}{n}$ ② $\frac{8}{n}$ ③ $\frac{6}{n}$ ④ $\frac{3}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \dots$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$$\therefore a_n = \frac{12}{n}$$

5. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$ 일 때, S_{10} 의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 25 \text{ 에서 } a + 2d = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2} = 49 \text{ 에서 } a + 3d = 7 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$d = 2, a = 1$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

6. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\textcircled{A} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

7. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

8. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3$ 의 값은?

- ① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 + 3a_k^2 + 3a_k + 1) - \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 - 3a_k^2 + 3a_k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6a_k^2 + 2) = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= 6 \times 20 + 2 \times 10 = 140 \end{aligned}$$

9. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

- ① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \sum_{j=1}^{10} j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) = 385 \end{aligned}$$

10. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$
⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

11. $x > 0$, $x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[k]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

12. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 5$$

13. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

① 3

② $\sqrt{3}$

③ 5

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$$

14. $5^{\log_5 2 + 3 \log_5 3 - \log_5 6}$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & 5^{\log_5 2 + 3 \log_5 3 - \log_5 6} \\ &= 5^{\log_5 2 + \log_5 3^3 - \log_5 6} \\ &= 5^{\log_5 \frac{2 \times 3^3}{6}} = 5^{\log_5 3^2} = 9 \end{aligned}$$

15. $\frac{1}{2} \log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

16. 첫째항이 -10 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$$a_1 = -10, a_7 = -10 + 6d$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \cdot (-10) + 6d\}}{2}, a_7 = S_7 \text{에서 } d = 4$$

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot (-10) + 9 \cdot 4\}}{2} = 80$$

17. 두 수 0, 1을 사용하여 다음과 같은 수열을 만들었을 때, 10001은 몇 번째 항인가?

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001...

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

각 항의 자리 수에 따라 군수열을 만들면
(1), (10, 11), (100, 101, 110, 111),...
10001은 제 5군의 2번째 수이고 1 ~ 4군까지는
 $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ 개의 항이 있으므로
10001은 $15 + 2 = 17$ 번째 항이다.

18. $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여
변끼리 더하면

$$\begin{array}{r} a_1 = a_1 + 1^2 \\ a_2 = a_2 + 2^2 \\ a_3 = a_3 + 3^2 \\ \vdots \\ +) a_{10} = a_9 + 9^2 \end{array}$$

$$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2)$$

$$= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$$

$$= 290$$

19. 다음은 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)}) \text{이므로}$$
$$a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})\left(\boxed{(나)}\right)^{n-1}$$

- ① $1, \frac{1}{2}$ ② $1, 2$ ③ $2, \frac{1}{2}$ ④ $2, 2$ ⑤ $3, \frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 에서
 $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$
이때, 수열 $\{a_n - 2\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로
 $a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $\therefore a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $\therefore (가) = 2, (나) = \frac{1}{2}$

20. $a_1 = p, a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의되는 수열이 있다.

다음 중 임의의 양수 p 에 대하여 $a_n = p$ 가 되도록 하는 n 의 값은?

- ① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

$$a_1 = p, a_2 = -\frac{1}{p+1},$$

$$a_3 = \frac{-1}{-\frac{1}{p+1} + 1} = -\frac{p+1}{p},$$

$$a_4 = \frac{-1}{-\frac{p+1}{p} + 1} = p, a_5 = -\frac{1}{p+1}, \dots$$

$\therefore a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{22} = a_{25} = \dots = p$
즉, $n = 3k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면 $a_n = p$ 이다.

$\therefore a_{22} = p$

21. $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ 라 할 때, $\log_{24} \sqrt{18}$ 을 a, b 를 사용하여 나타낸 것은?

① $\frac{a+2b}{2(a+3b)}$
 ④ $\frac{2(a+2b)}{3a+b}$

② $\frac{a+2b}{2(3a+b)}$
 ⑤ $\frac{2(2a+b)}{a+3b}$

③ $\frac{2a+b}{2(3a+b)}$

해설

$$\log_{24} \sqrt{18} = \frac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24} \text{ 에서}$$

$$\log_5 \sqrt{18} = \frac{1}{2} \log_5 18 = \frac{1}{2} \log_5 (2 \cdot 3^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\log_5 2 + 2 \log_5 3) = \frac{1}{2} (a + 2b)$$

$$\log_5 24 = \log_5 (2^3 \cdot 3) = 3 \log_5 2 + \log_5 3 = 3a + b$$

$$\therefore \log_{24} \sqrt{18} = \frac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24} = \frac{\frac{1}{2}(a+2b)}{3a+b} = \frac{a+2b}{2(3a+b)}$$

22. $10^a = 2$, $10^b = 3$ 일 때, $\log_{15} 10$ 을 a , b 로 나타내면?

① $\frac{1}{a+b+1}$

② $\frac{1}{a-b+1}$

③ $\frac{1}{a+b-1}$

④ $\frac{1}{b-a+1}$

⑤ $\frac{1}{b-a-1}$

해설

$10^a = 2$, $10^b = 3$ 에서 $a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$

$$\log_{15} 10 = \frac{1}{\log_{10} 15}$$

한편, $\log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$

$$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 = b - a + 1$$

$$\therefore \log_{15} 10 = \frac{1}{b-a+1}$$

23. 다음 상용로그표를 이용하여 $\sqrt[6]{5}$ 의 값을 계산하면?

<상용로그표>

수	0	1	2	...	9	비례부분								
						1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.2	.0792	.0828	.0864	...	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	...	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2.0	.3010	.3032	.3054	...	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	...	.3404	2	4	6	8	10	13	14	16	18

- ① 1.296 ② 1.302 ③ 1.308 ④ 1.313 ⑤ 1.321

해설

$$\log \sqrt[6]{5} = \frac{1}{6} \log 5 = \frac{1}{6} (1 - \log 2)$$

$$= \frac{1}{6} (1 - 0.3010) = 0.1165$$

상용로그표에서 비례부분을 이용하여 계산하면

$$\log 1.30 = 0.1139$$

$$\log 1.308 = 0.1165$$

$$\therefore \sqrt[6]{5} = 1.308$$

24. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $6x$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log(2^x + 1) = \log 3 + \log(2^x + 7)$$

$$\log(2^x + 1)^2 = \log 3(2^x + 7) \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 = 3(2^x + 7)$$

$$2^x = t \text{로 치환 } (t + 1)^2 = 3(t + 7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$$

$$(t + 4)(t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = 5 (\because t > 0)$$

$$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1 - 0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 값은 $6x = 14$

25. 네 수 $1, a, b, c$ 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$ 를 만족시킨다. 공비 r 의 값은? (단, $r > 1$)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

$a = r, b = r^2, c = r^3$ 이므로

$\log_8 c = \log_{2^3} r^3 = \log_2 r$

$\log_a b = \log_r r^2 = 2$

따라서, $\log_8 c = \log_a b$ 에서

$\log_2 r = 2$

$\therefore r = 2^2 = 4$