1. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 a_5 a_6 = 125$일 때, a_5의 값은?

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_4 a_5 a_6 = ar^3 \cdot ar^4 \cdot ar^5 = a^3 r^{12} = (ar^4)^3$이므로

$(ar^4)^3 = 125 = 5^3$

$\therefore\ a_5 = ar^4 = 5$

2. $\log_2(x-5)$ 의 값이 존재하기 위한 x의 범위는?

① $x>2$ ② $x<2$ ③ $x>5$ ④ $x<5$ ⑤ $x\neq 5$

해설

$x-5>0$ 로부터 $x>5$

3. $\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 일 때, $\log_{ab} b$ 의 값은?

① 2 ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 에서

$$\frac{\log \sqrt{3}}{\log a} = \frac{\log 9}{\log b},\ \frac{\frac{1}{2}\log 3}{\log a} = \frac{2\log 3}{\log b}$$

$$\frac{\log b}{\log a} = 4$$

즉, $\log_a b = 4$

$$\therefore\ \log_{\sqrt{ab}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{ab}}$$

$$= \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a ab} = \frac{2\log_a b}{1 + \log_a b} = \frac{8}{5}$$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　　② 8　　③ 11　　④ 13　　⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

5. 수열 -3, a, b, c, 13이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$

$b-a=d$

$c-b=d$

$13-c=d$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

더하면 $13-(-3)=4d \quad \therefore d=4$

$\therefore a=-3+4=1$

$b=1+4=5$

$c=5+4=9$

$\therefore a+b+c=15$

6. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \ \cdots\cdots ㉠$

$a_7 = ar^6 = 96 \ \cdots\cdots ㉡$

㉡ $\div$ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \dfrac{3}{2}$

첫째항은 $\dfrac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

7. $4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{3}k^3$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$

$=3025-36=2989$

8. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=2^p\cdot 3^q$ 일 때, $p+q$의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

$$=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}+\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 3}$$

$$=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$$

$$=\left(3+2+\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt[3]{3}=2^4\cdot 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore p=4,\ q=-\frac{2}{3} \qquad \therefore p+q=\frac{10}{3}$$

9. 다음 식의 값 중 값이 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$

② $\log_{\sqrt{5}} 25$

③ $\log_2 3 \log_3 5 \log_5 16$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4$

③ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16 = \dfrac{\log 3 \cdot \log 5 \cdot \log 16}{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 5}$

$= \dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 16 = \log_2 16 = 4$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \dfrac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

10. $5^a = 2,\ 5^b = 3$이라 할 때, $\log_6 72$를 a와 b의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+b}{a-b}$ ② $\dfrac{2a+b}{b-a}$ ③ $\dfrac{2a-b}{a+b}$

④ $\dfrac{2a+b}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{3a+2b}{a+b}$

해설

$a = \log_5 2,\ \ b = \log_5 3$

$$\log_6 72 = \frac{3\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a+2b}{a+b}$$

11. 첫째항이 45 이고, 공차가 -4 인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음 음수가 되는가?

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

해설

첫째항이 45 이고, 공차가 -4 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

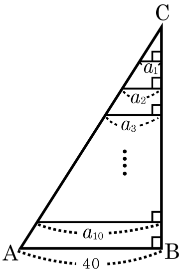
$$\frac{n\{2\cdot 45+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}=n(47-2n)$$

$n(47-2n)<0$ 에서 $n<0$ 또는 $n>\dfrac{47}{2}$

$n>0$ 이므로 $n>\dfrac{47}{2}=23.5$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제 24 항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

12. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1+a_{10}=40,\ a_2+a_9=40, \cdots, a_5+a_6=40$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=40\times5=200$

13. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$

$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$

$= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k$

$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$

$= 1155 - 110$

$= 1045$

14. 수열 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$　② $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　④ $\frac{1}{4}n(n+1)(n+3)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+3)$

해설

$$a_n = 1+2+\cdots+n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)\cdot 2(n+2)}{2\cdot 6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

15. $\sum_{k=1}^{50}\sqrt{(2k+1)-2\sqrt{k(k+1)}}$의 값을 α라 할 때, 자연수 n에 대하여 $n<\alpha<n+1$이 성립한다. 이때 n의 값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$\sum_{k=1}^{50}\sqrt{(2k+1)-2\sqrt{k(k+1)}}$

$=\sum_{k=1}^{50}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{51}-\sqrt{50})$

$=\sqrt{51}-1$

$7<\sqrt{51}<8$이므로 $6<\sqrt{51}-1<7$

$\therefore n=6$

16. 수열 1, 5, 11, 19, 29, $\cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① n^2+n+1 ② n^2+n-1 ③ n^2+n-2

④ n^2-n+1 ⑤ n^2-n-1

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$$\begin{array}{lllllll} \{a_n\}: 1, & 5, & 11, & 19, & 29, & \cdots & \\ & \vee & \vee & \vee & \vee & & \\ & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & \to b_n = 2n+2 \end{array}$$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$$

$$= n^2 + n - 1$$

17. 수열 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, $\cdots$ 에서 첫째항부터 제 100항까지의 합은?

① 930 ② 945 ③ 950 ④ 955 ⑤ 960

해설

(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), $\cdots$ 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 n군의 항수는 n이므로 100번째 항은

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} < 100$$

에서 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$이므로 제 14군의 9항이다.

그리고 제 n군까지의 합을 구해 보면

$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ 이므로

첫째항부터 제 100항까지의 합 S_{100}은 제 13군까지의 합에 14를 9개 더한 값이 된다.

$$\therefore S_{100} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$$

18. $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 1,\ a_{n+9} - a_{n+2} = 35$가 성립할 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2} = a_n + a_{n+2}$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_{n+9} = a_{n+2} + 7d$에서 $7d = 35$

$\therefore\ d = 5$

$\therefore\ a_{100} = 1 + 99 \cdot 5 = 496$

19. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = -a_n + 2$와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

① $1+(-1)^n$ ② $2+(-1)^n$ ③ $3+(-1)^n$

④ $4+(-1)^n$ ⑤ $5+(-1)^n$

해설

$a_{n+1} = -a_n + 2$에서

$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1$, 공비가 -1인 등비수열이므로

$a_n - 1 = (a_1 - 1)\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^n$

$\therefore\ a_n = 1 + (-1)^n$

20. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$
양변에 (㉠)^{3}을 더하면
$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
$= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4}$
$= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2$
따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^{3}을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$
$\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$
$\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$

21. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

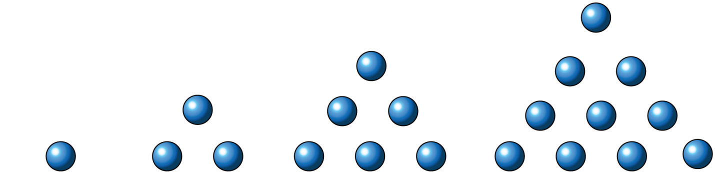
상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$ 이므로

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{0.138} &= \frac{1}{3}\log 0.138 = \frac{1}{3}\log(1.38 \times 10^{-1}) \\ &= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1) \\ &= -0.2867 = -1 + 0.7133\end{aligned}$$

따라서

$\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분은 0.7133 이다.

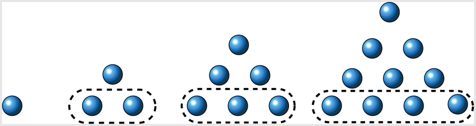
22. 바둑알로 다음 그림과 같은 모양을 만들 때, $(n+1)$ 번째 모양에는 n 번째 모양보다 바둑알이 몇 개 더 있는가?



첫 번째　　두 번째　　세 번째　　네 번째

① $n-2$　② $n-1$　③ n　④ $n+1$　⑤ $n+2$

해설



위의 그림에서 두 번째, 세 번째, 네 번째, $\cdots$ 모양에는 각각 바로 앞보다 바둑알이 2개, 3개, 4개, $\cdots$ 더 있으므로 $(n+1)$ 번째 모양에는 n 번째 모양보다 바둑알이 $(n+1)$ 개 더 있다. 즉, n 번째 모양을 이루는 바둑알의 개수가 a_n 개이면 $a_{n+1}-a_n=n+1$ 이다.

23. 세 양수 a, b, c에 대하여

$$a^x = (\sqrt{b})^y = (\sqrt[3]{c})^z = 125, \ abc = 5\sqrt[5]{5}$$

가 성립할 때, $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{24}{5}$

해설

$a^x = b^{\frac{y}{2}} = c^{\frac{z}{3}} = 5^3$이므로

$a^x = 5^3$에서 $x = \log_a 5^3 = 3\log_a 5$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\log_5 a$

$b^{\frac{y}{2}} = 5^3$에서 $\frac{y}{2} = \log_b 5^3 = 3\log_b 5$

$\therefore \frac{2}{y} = \frac{1}{3}\log_5 b$

$c^{\frac{z}{3}} = 5^3$에서 $\frac{z}{3} = \log_c 5^3 = 3\log_c 5$

$\therefore \frac{3}{z} = \frac{1}{3}\log_5 c$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{c}$

$= \frac{1}{3}\log_5 a + \frac{1}{3}\log_5 b + \frac{1}{3}\log_5 c$

$= \frac{1}{3}(\log_5 a + \log_5 b + \log_5 c)$

$= \frac{1}{3}\log_5 abc$

$= \frac{1}{3}\log_5 5^{\frac{6}{5}} (\because abc = 5\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{6}{5}})$

$= \frac{2}{5}$

24. 어느 지역의 바다에서 수면으로부터 dm 인 곳에서의 빛의 세기를 $L(d)$ 라 하면 $L(d+12) = \frac{3}{10}L(d)$ 의 관계식이 성립한다고 한다. 이 바다에서 수면에서의 빛의 세기의 10% 인 곳의 수심을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값을 구하면? (단, $\log 3 = 0.48$ 으로 계산한다.)

① 23m ② 25m ③ 27m ④ 29m ⑤ 31m

해설

$L(d+12) = \frac{3}{10}L(d)$ 에서

$L(12) = \frac{3}{10}L(0)$

$L(24) = \frac{3}{10}L(12) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 L(0)$

$L(36) = \frac{3}{10}L(24) = \left(\frac{3}{10}\right)^3 L(0)$

$\vdots$

이므로 $L(12d) = \left(\frac{3}{10}\right)^d L(0)$ 이 성립한다.

$\therefore L(d) = \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{d}{12}} L(0)$

수면에서의 빛의 세기의 10% 인 곳의 수심을 xm 라 하면

$\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{x}{12}} L(0) = \frac{1}{10}L(0)$이므로 $\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{x}{12}} = \frac{1}{10}$

로그의 정의에 의하여

$\frac{x}{12}\log\frac{3}{10} = \log\frac{1}{10}$, $\frac{x}{12}(\log 3 - 1) = -1$

$\therefore x = \frac{-12}{\log 3 - 1} = \frac{-12}{0.48 - 1} \fallingdotseq 23.07$

따라서, 구하는 수심은 약 23m 이다.

25. 30년간 자동차회사에 근무하던 사람이 명예퇴직을 하면서 퇴직금으로 2억 4천만 원을 받을 예정인데 이 돈을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액씩 연금 형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 연이율 5%의 복리로 10년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은 얼마인가? (단, $1.05^{10} = 1.6$으로 계산한다.)

① 3000만 원 ② 3080만 원 ③ 3120만 원

④ 3160만 원 ⑤ 3200만 원

해설

(2억 4천만원을 10년간 은행에 예치했을 때의 원리합계)=(10년간 받는 연금의 종합)

매년말에 받는 연금을 a원이라 하면

(10년간 받는 연금의 종합)

$=a(1+r)^9 + a(1+r)^8 + \cdots + a$

$$\frac{a\left\{(1+r)^{10}-1\right\}}{(1+r)-1} = 2.4\text{억}\times(1+r)^{10}$$

$$\frac{a(1.6-1)}{0.05} = 2.4\text{억}\times 1.6$$

$$a = \frac{2.4\times 1.6\times 0.05}{0.6}\text{억}$$

$= 0.32$억

$= 3200$만 (원)