1. 두 이차함수의 그래프 $y = x^2 - 2ax + 4$, $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$가 모두 x축과 교점을 갖도록 상수 a의 값의 범위를 정하면?

① $-9 \le a \le -5$ ② $-6 \le a \le -2$ ③ $-3 \le a \le 0$

④ $2 \le a \le 5$ ⑤ $3 \le a \le 7$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면

$x^2 - 2ax + 4 = 0$에서

$\dfrac{D_1}{4} = a^2 - 1 \cdot 4 \ge 0$, $a^2 - 4 \ge 0$, $(a+2)(a-2) \ge 0$

$\therefore a \le -2$ 또는 $a \ge 2$ ⋯⋯ ㉠

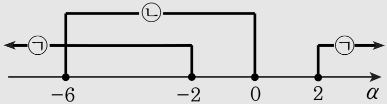
또, 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면

$2x^2 - 2ax + (a^2 + 3a) = 0$에서

$\dfrac{D_2}{4} = a^2 - 2(a^2 + 3a) \ge 0$, $a^2 + 6a \le 0$, $a(a+6) \le 0$

$\therefore -6 \le a \le 0$ ⋯⋯ ㉡

이 때, ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(1) 두 그래프 모두 x축과 교점을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 위의 수직선에게 ㉠과 ㉡의 공통 부분이므로 $-6 \le a \le -2$

2. 다음 식은 평면 위에 있는 어떤 그래프의 방정식이다. 이 그래프가 x 축에 접하도록 실수 a, b 의 값에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

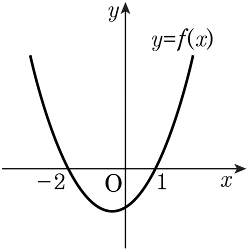
$$y+(x+y)x+(a-1)x-b^2=0$$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

접점의 x 좌표는 $y=0$ 일 때, 얻어지는 방정식
$x^2+(a-1)x-b^2=0$ 의 중근이다.
$\therefore\ D=(a-1)^2+4b^2=0$
a, b 는 실수이므로 $a=1$, $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

3. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y=f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a=-3$

4. 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 x축과는 접하고 직선 $y = 4x$와는 서로 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$　　② $a < -1$　　③ $a > 0$

④ $a < 1$　　⑤ $a > 1$

해설

포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x축과는 접하므로
이차방정식 $y = x^2 + 2ax + b = 0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b = 0 \qquad \therefore b = a^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또, 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 직선 $y = 4x$와 서로 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 4x$,
즉 $x^2 + 2(a-2)x + b = 0$의 판별식을 D'이라 할 때

$$\frac{D'}{4} = (a-2)^2 - b < 0 \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a-2)^2 - a^2 < 0$, $-4a + 4 < 0$
$\therefore a > 1$

5. 직선 $y = mx - 4$가 이차함수 $y = 2x^2 - 3$ 의 그래프에 접하도록 하는 양수 m의 값은?

① $\sqrt{2}$　　② 2　　③ $\sqrt{6}$　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

이차방정식 $2x^2 - 3 = mx - 4$, 즉 $2x^2 - mx + 1 = 0$이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$

$m^2 - 8 = 0,\ m^2 = 8$

$\therefore m = 2\sqrt{2} (\because m > 0)$

6. 직선 $y = x + 4$에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$ ② $4x - 4y = 9$ ③ $-4x + 4y = 9$

④ $-4x - 4y = 5$ ⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$라 하면

이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,

즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$D = 1 - 4k + 8 = 0$

$\therefore k = \frac{9}{4}$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \frac{9}{4}$

$\therefore -4x + 4y = 9$

7. 이차함수 $y=x^2+kx+k$ 의 그래프와 직선 $y=x+1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 범위는?

① $k<1$ 또는 $k>5$　② $1<k<5$

③ $1\le k\le 5$　④ $k<-5$ 또는 $k>-1$

⑤ $1<k<3$

해설

이차방정식 $x^2+kx+k=x+1$, 즉 $x^2+(k-1)x+k-1=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D=(k-1)^2-4\cdot1\cdot(k-1)>0$

$k^2-6k+5>0,\ \ (k-1)(k-5)>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>5$

8. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1\ ,\quad y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하면?

① $m < -2,\ \ m > \dfrac{2}{3}$
② $m < -1,\ \ m > \dfrac{2}{3}$
③ $m < -2,\ \ m > 2$
④ $m < 2,\ \ m > \dfrac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\ \ m > \dfrac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족하도록 m을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서
판별식 $D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,\ (m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore\ \ m < -2\ ,\ m > \dfrac{2}{3}$

(참고) $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ $\cdots\cdots$ ㉠
$y = x + 1$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉡의 그래프는 그 위치가 고정되어 있지만 ㉠의 그래프는 m의 값이 변함에 따라 그 위치가 변한다.
이를테면 $m = 0,\ m = 1$일 경우에 대해서 생각해 보자.
(i) $m = 0$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 - x + 1$이므로
이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 위에 있는 x의 범위는 부등식 $x^2 - x + 1 > x + 1$을 만족하는 x의 범위와 같다.
(ii) $m = 1$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 + 2$이므로
이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위에 있으므로 ㉠이 ㉡보다 항상 위에 있는 x의 범위는 x의 모든 실수값이다.
이 문제의 경우는 (ii) 같이 되도록 m의 범위를 정하라는 것이다.
㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면
$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$
곧, $x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$이 x의 모든 실수값에 대하여 항상 성립하면 된다.
이 결과는 ㉠, ㉡의 그래프가 만나지 않도록 m의 범위를 정한 것과 같다.
그러나 일반적으로 직선과 포물선이 만나지 않는 경우에는 직선이 포물선보다 항상 위쪽에 있는 경우도 있으므로
'포물선이 직선보다 위쪽에 있다' 는 것과 '포물선과 직선이 만나지 않는다' 는 것과는 그 뜻이 다르다.

9. 이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$
② $m < -1$ 또는 $m > \frac{1}{3}$
③ $m < \frac{1}{3}$ 또는 $m > 2$
④ $m < \frac{2}{3}$ 또는 $m > 2$
⑤ $m < -2$ 또는 $m > 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 x에 대하여

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 이 항상 성립하여야 한다.

따라서, 이차방정식 $x^2 + (m-2)x + m^2$ 의 판별식 $\mathrm{D} < 0$ 이어야 한다.

$\mathrm{D} = (\mathrm{m}-2)^2 - 4\mathrm{m}^2 < 0$

$(m+2)(3m-2) > 0$

$\therefore m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$

10. 이차함수 $y = x^2 + 6ax + 1$의 그래프가 직선 $y = 2x + 2a$보다 항상 위쪽에 있을 때, a의 범위는?

① $0 < a < \frac{4}{9}$ ② $\frac{1}{3} < a < 1$

③ $0 \leq a < 1$ ④ $a < 0$ 또는 $a > \frac{4}{9}$

⑤ $a < \frac{1}{3}$ 또는 $a < 1$

해설

이차함수 $y = x^2 + 6ax + 1$의 그래프가 직선 $y = 2x + 2a$보다 항상 위쪽에 있으려면

$y = x^2 + 6ax + 1 - (2x + 2a)$의 판별식 $D/4 < 0$야 하므로

$(3a - 1)^2 - 1 + 2a < 0$

$9a^2 - 4a < 0$

$a(9a - 4) < 0$

$0 < a < \frac{4}{9}$

11. 직선 $y = ax + 1$이 이차함수 $y = x^2 - 3x + 5$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y = x^2 + 3x + 5$의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < -7$ 또는 $a > 1$

② $-1 < a < 7$

③ $a < 7$

④ $-7 < a < 1$

⑤ $1 < a < 7$

해설

$ax + 1 = x^2 - 3x + 5$에서 $x^2 - (a+3)x + 4 = 0$

서로 다른 두 점에서 만나므로

$D = (a+3)^2 - 4 \cdot 4 > 0$

$a < -7$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉠

$ax + 1 = x^2 + 3x + 5$에서 $x^2 + (3-a)x + 4 = 0$

만나지 않으므로 $D = (3-a)^2 - 4 \cdot 4 < 0$

$-1 < a < 7 \cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡의 공통범위는 $1 < a < 7$

12. 이차함수 $y = x^2 - ax + k^2 + 2k$의 그래프와 직선 $y = 2kx + b$가 k의 값에 관계없이 서로 접할 때, 실수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -6 ② -3 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 - ax + k^2 + 2k = 2kx + b$ 에서

$x^2 - (a + 2k)x + k^2 + 2k - b = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D = (a + 2k)^2 - 4(k^2 + 2k - b) = 0$

$a^2 + 4ak - 8k + 4b = 0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로

$4k(a - 2) + a^2 + 4b = 0$에서

$a - 2 = 0,\ a^2 + 4b = 0$

따라서 $a = 2,\ b = -1$이므로 $ab = -2$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 x축에 접하도록 하는 상수 p, q의 값은?

① $p = -1,\ q = -1$ 또는 $p = -3,\ q = -9$

② $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

③ $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

④ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

⑤ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가
점 $(-1,\ 4)$를 지나므로
$4 = 1 - 2p + q$에서
$2p - q = -3 \cdots$ ㉠
한편, x축에 접하므로
$D/4 = p^2 - q = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

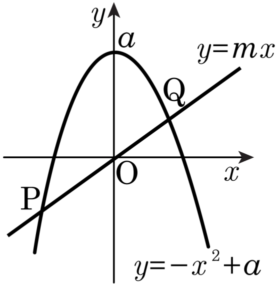
14. 이차함수 $y=x^2-px+q$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나고, x축과 단 한 점에서 만나도록 $p,\ q$의 값을 정할 때, $p+q$의 값으로 가능한 수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$y=x^2-px+q \cdots$ ㉠의 그래프는
점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $1=1-p+q$
$\therefore\ p=q \cdots$ ㉡
또, ㉠의 그래프가 x축과 단 한 점에서 만나므로,
㉠에서 $y=0$으로 한 이차방정식
$x^2-px+q=0$은 중근을 갖는다.
따라서 판별식을 D라 하면
$D=p^2-4q=0 \cdots$ ㉢
㉡, ㉢에서 $p^2-4p=0$
$\therefore\ p(p-4)=0 \qquad \therefore\ p=0,\ 4$
$\therefore\ p=0,\ q=0$ 또는 $p=4,\ q=4$

15. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

16. 직선 $y=2x+k$ 가 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x+k=x^2$,
즉 $x^2-2x-k=0$ 의 두 근을 α,β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-k$
두 그래프의 교점의 좌표를
$(\alpha,\ 2\alpha+k),\ (\beta,\ 2\beta+k)$ 라 하면
두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta)^2}=2\sqrt{10}$ 에서
$\sqrt{5(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{10}$
$\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$
이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 에서
$(2\sqrt{2})^2=2^2-4(-k),\ 8=4+4k$
$\therefore\ k=1$

17. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -1$

② $a = -1,\ b = 0$

③ $a = 1,\ b = 0$

④ $a = 1,\ b = -1$

⑤ $a = 0,\ b = 1$

해설

$y = ax^2 + bx + 8 \quad \cdots ①$

$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \cdots ②$

$y = -x + 6 \quad \cdots ③$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로

②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.

②, ③을 연립하여 풀면

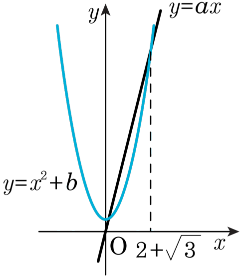
교점은 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 7)$ 이고,

이 두 점을 곡선 ①이 지나므로

$4a + 2b + 8 = 4,\ a - b + 8 = 7$

$\therefore\ a = -1,\ b = 0$

18. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, $a + b$ 는 유리수)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + b = ax$,

즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.

이때, a, b 는 모두 유리수이므로

방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면

다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,

$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

$\therefore\ a + b = 5$

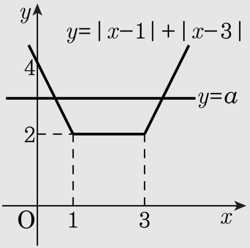
19. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



20. 이차함수 $y = ax^2 + 2x + 4 + 2a$ $(a \neq 0)$ 의 최댓값이 3 일 때, a 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

이차함수에서 최댓값을 가지려면 이차항의 계수 a 의 부호는 음수이다.

주어진 식을 변형 하면

$$y = a\left\{x^2 + \frac{2}{a}x + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 4 + 2a$$

$$= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 4 + 2a - \frac{1}{a}$$

따라서 $x = -\frac{1}{a}$ 일 때,

최댓값 $4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 을 가진다.

$4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 에서 $2a - \frac{1}{a} + 1 = 0$

$2a^2 + a - 1 = 0$, $(a + 1)(2a - 1) = 0$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

$a = -1(\because\ a < 0)$

21. 두 점 $(2,0)$, $(-2,0)$ 을 지나는 이차함수 $y=x^2+ax+b$ 는 $x=c$ 일 때, 최솟값 d 를 갖는다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

두 점 $(2,0),(-2,0)$ 을 지나므로
$y=x^2+ax+b$ 는 y 축 대칭이다.
축이 $x=0$ 에서 $a=0$, $c=0$, $b=d$
$(2,0)$ 을 지나므로 $0=4+b$ $\quad\therefore b=-4=d$
$\therefore a+b+c+d=0-4+0-4=-8$

22. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x) - f(-x) = x^2 - 3x + 8$

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$2(ax^2 + bx + c) - (ax^2 - bx + c) = x^2 - 3x + 8$

$\Rightarrow b = -1, c = 8, a = 1$

$\therefore\ f(x) = x^2 - x + 8 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$

$\Rightarrow$ 최솟값 : $\frac{31}{4}$

23. 함수 $y = x^2 - 2x + a$ 의 최솟값이 -3 일 때, 상수 a 의 값을 정하고, 함수 $y = ax^2 - 2x + 1$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 $\frac{3}{2}$ ② 최댓값 $\frac{3}{2}$ ③ 최솟값 $-\frac{1}{2}$

④ 최댓값 $-\frac{1}{2}$ ⑤ 최솟값 $-\frac{3}{2}$

해설

$y = (x-1)^2 + a - 1$ 이므로

$x = 1$ 일 때, 최솟값이 $a - 1$ 이다.

$a - 1 = -3 \quad \therefore\ a = -2$

$y = -2x^2 - 2x + 1 = -2(x^2 + x) + 1$

$= -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$

따라서 $x = -\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$

24. x가 실수일 때, 이차함수$y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 가질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $a < 0$ ㄴ $4a + b = 0$ ㄷ $4a - c = -3$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖는 이차함수는
$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$ 이다.
$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3$ 이므로
$b = -4a,\ c = 4a + 3$ 이다.

25. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 최소값은 ? (단, a 는 실수)

① 12　② 9　③ 6　④ 3　⑤ 2

해설

$x^2+2ax+9-2a^2=0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=9-2a^2$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8a^2-18$
또 α, β 는 실근이므로 $\dfrac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$
$\therefore a^2\geq 3$
따라서 $a^2=3$ 일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 은 최소이고
최소값은 6 이다.

26. $x^2-5x+6<0$ 일 때, $P=x^2+5x+6$ 이 취할 수 없는 값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

해설

$x^2-5x+6<0$, $(x-2)(x-3)<0$ $\therefore\ 2<x<3$

이 때, $P=x^2+5x+6=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 이므로

$2<x<3$ 인 구간에서의 P 는 증가함수이다.

따라서 $P_{x=2}<P<P_{x=3}$ 이 성립한다.

$P_{x=2}=20,\ P_{x=3}=30$ 이므로 $20<P<30$

27. x의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1　　② $-\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{3}$　　④ 1　　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$y = 2x^2 - 8kx = 2(x-2k)^2 - 8k^2$ 이
이참함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(2k,\ -8k^2)$ 이다.

(i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하므로 주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $-8k^2 = 10,\ k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $18 - 24k = 10,\ 24k = 8$

$\therefore k = \frac{1}{3}$

28. $-2 \leq x \leq 0$ 에서 이차함수 $y=-2x^2+4x+a+1$ 이 최댓값 1 을 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y=-2x^2+4x+a+1=-2(x-1)^2+a+3$ 이
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 1 이
x 의 값의 범위 $-2 \leq x \leq 0$ 에 속하지 않으므로
주어진 이차함수는 $x=-2$ 일 때 최솟값을 갖고
$x=0$ 일 때 최댓값을 갖는다.
최댓값이 1 이므로 $a+1=1$ $\quad \therefore a=0$

29. $a-1 \leq x \leq a+4$ 에서 이차함수 $y=x^2-2ax+4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x)=x^2-2ax+4=(x-a)^2-a^2+4$
이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x의 값의 범위에 속하므로
$x=a$ 일 때 최솟값, $x=a+4$ 일 때 최댓값을 갖는다.
즉, $f(a+4)=(a+4)^2-2a(a+4)+4=4$
$a^2+8a+16-2a^2-8a+4=4$
$a^2=16$
$\therefore a=4\ (a>0)$

30. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

31. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x + a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2 - 8$
따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

32. 함수 $y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x\right) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x\right) - 6$ 에서

$x^2+4x+5 = t$ 로 놓으면

$y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x+5\right) + 4$

$= -t^2 - 2t + 4 = -(t+1)^2 + 5$

그런데 $t = x^2+4x+5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로

$t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.

따라서, $m = -2,\ M = 1$

$\therefore M + m = -1$

33. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2-2x+2)^2 - 4(x^2-2x+2)+1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2-2x+2)=t$ 로 치환하면,

$t^2-4t+1=(t-2)^2-3$.

t 의 범위는 x 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t=2\text{일때},\ y=-3 \\ t=5\text{일때},\ y=6 \end{cases}$$

$\therefore\ M \times m = -18$

34. 함수 $y=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t=x^2-2x+3$ 으로 놓으면
$y=t^2-2t+1=(t-1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t=(x-1)^2+2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t=2$일 때 1이다.

35. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면

$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) &= g(t) = t(t+1) + 3t - 6 \\ &= t^2 + 4t - 6 \\ &= (t+2)^2 - 10 \ (t \geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

36. 두 함수 $f(x)=x^2-6x-5,\ g(x)=3x+2$ 에 대하여 $F(x)=f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \le x \le 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

해설

$t=g(x)=3x+2$ 라 놓으면
$-2 \le x \le 3$ 에서 $-4 \le t \le 11 \cdots$ ㉠
$F(x)=f(t)=t^2-6t-5=(t-3)^2-14$
㉠의 범위에서
$t=3$ 일 때 $m=-14$
$t=11$ 일 때 $M=50$
$\therefore\ M-m=50-(-14)=64$

37. 이차함수 $f(x)=x^2+2x+a$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값과 $f(f(x))$ 의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \le 0$　② $a \ge 0$　③ $a \le 1$　④ $a \ge 1$　⑤ $a \le 2$

해설

$f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$ 은
$x=-1$ 일 때 최솟값 $a-1$ 을 갖는다.
$\therefore f(x) \ge a-1$
$f(x)=t$ 라면
$f(f(x))=f(t)=t^2+2t+a(t \ge a-1)$
이때, 꼭짓점의 t 좌표 -1 이
$t \ge a-1$ 에 포함되면
$f(t)$ 의 최솟값이 $f(-1)=a-1$ 이 되어 최솟값과 같아진다.
즉, $-1 \ge a-1$　$\therefore a \le 0$

38. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - y^2 = 4$ 에서 $y^2 = x^2 - 4 \cdots\cdots$ ㉠

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

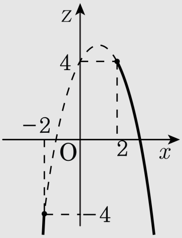
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$

$= -(x-1)^2 + 5$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2,\ x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

39. $x^2 + y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2y + x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 = 4$에서 $x^2 = 4 - y^2$
x, y가 실수이므로
$x^2 = 4 - y^2 \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore -2 \leq y \leq 2$
$2y + x^2$에 $x^2 = 4 - y^2$을 대입하면
$2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$
$= -y^2 + 2y + 4 = -(y-1)^2 + 5$
이 때, $-2 \leq y \leq 2$이므로 $y = 1$일 때
최댓값은 5, $y = -2$일 때 최솟값은 -4이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

40. $x^2+2y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x+2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2+2y^2=4$에서 $2y^2=4-x^2$

이때, y는 실수이므로 $2y^2=4-x^2 \geq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

$4x+2y^2=4x+4-x^2=-(x-2)^2+8$

$(-2 \leq x \leq 2)$

따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 $m=-8$이고,

$x=2$일 때, 최댓값 $M=8$이므로 $M+m=0$

41. m이 실수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha\beta$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2m-3)\geq 0$$

$m^2-2m-3\leq 0, (m+1)(m-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq m\leq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=2m^2-2m-3=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$$

이 때, $-1\leq m\leq 3$이므로 $m=3$일 때

$\alpha\beta$의 최댓값은 9이다.

42. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$

$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$

$= -(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 8$

x, y는 실수이므로 $(x - 1)^2 \geq 0$, $(y - 2)^2 \geq 0$

따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은

$x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

43. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$

$x,\ y,\ z$는 실수이므로

$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는

$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,

최댓값 9를 갖는다.

44. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$

$= (x - 3)^2 + 2(y + 1)^2 - 4$이므로

$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

45. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

① 최댓값 1, 최솟값 −3
② 최댓값 3, 최솟값 −1
③ 최댓값 3, 최솟값 1
④ 최댓값 −1, 최솟값 −3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 −1

해설

x에 관해 내림차순으로 정리하면

$4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$

실수의 해를 가지므로

$$\frac{D}{4} = (-8)^2 - 4(y^2 + 2y + 13) \geq 0$$

$\therefore\ y^2 + 2y - 3 \leq 0$

$\therefore\ (y+3)(y-1) \leq 0$

$\therefore\ -3 \leq y \leq 1$

따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 −3

46. $x^2 + y^2 = 5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x - y$는 $x = \alpha, y = \beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$2x - y = k$로 놓으면

$y = 2x - k \cdots$ ㉠

㉠을 $x^2 + y^2 = 5$에 대입하면

$x^2 + (2x - k)^2 = 5$

$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉡

㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면

x가 실수이므로

$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5)\ 0$, $k^2 \le 25$

$\therefore -5 \le k \le 5$

따라서 k의 최댓값은 5이다.

이 때의 x, y의 값은

㉡에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0$, $5(x-2)^2 = 0 \therefore x = 2$

㉠에서 $y = 4 - 5 = -1$

따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$이므로

$m + \alpha + \beta = 6$

47. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

$\therefore\ \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

48. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

> (1) x의 값의 범위를 구하여라.
> (2) 빗변의 길이를 z라 할 때, z^2을 x에 관한 식으로 나타내어라.
> (3) z^2의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

① (1) $2 \le x \le 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52

② (1) $1 \le x \le 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51

③ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50

④ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52

⑤ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

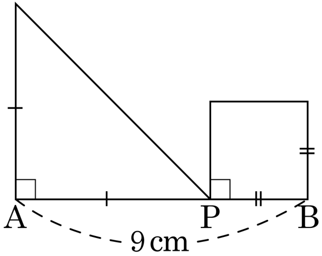
해설

(1) $x + y = 10$에서 $y = 10 - x$이고
삼각형의 넓이가 8 이상이므로
$\frac{1}{2}xy \ge 8,\ \frac{1}{2}x(10 - x) \ge 8$
$x^2 - 10x + 16 \le 0,\ (x-2)(x-8) \le 0$
$\therefore 2 \le x \le 8$

(2) 피타고라스의 정리에 의해
$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$
$= 2x^2 - 20x + 100$

(3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x-5)^2 + 50$
이 때, $2 \le x \le 8$이므로 z^2은 $x = 5$일 때
최솟값 50 , $x = 2$ 또는 $x = 8$일 때
최댓값 68을 갖는다.

49. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm

④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

50. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : ________ cm^2

▷ 정답 : 100 cm^2

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 $r$cm 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$$

$$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 $100m^2$ 이다.