1. 다음 (　　) 안에 알맞은 수는?

1, 5, 9, (　　), 17

① 10　② 11　③ 13　④ 14　⑤ 16

해설

나열된 각 수는 $4n+1$ 의 꼴이다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수는 $9+4=13$ 이다.

2. 수열 $-1,\ 3,\ -5,\ 7,\ -9,\ \cdots$ 의 7 번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 6 번째 항은 11, 7 번째 항은 -13이다.

3. 첫째항이 -10, 공차가 -3인 등차수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $-3n-7$ ② $-3n-5$ ③ $-n-7$
④ $-n-5$ ⑤ $-n+3$

해설

$a_n = -10 + (n-1) \cdot (-3) = -3n-7$

4. 등차수열 $10,\ 6,\ 2,\ -2,\ -6, \cdots$ 에서 공차를 d, 제 10항을 b라 할 때, $b+d$의 값은?

① -10　② -20　③ -30　④ -40　⑤ -50

해설

공차는 -4이므로 $d=-4$

$a_n = 10+(n-1)(-4) = -4n+14$

$\therefore a_{10} = -4\cdot 10+14 = -26$에서 $b=-26$

$\therefore\ b+d = -26+(-4) = -30$

5. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27 ② 10, 23, 29 ③ 11, 23, 27
④ 11, 23, 29 ⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2}=11$, 이 수열의 공차는 6이다.
따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

6. 첫째항이 $\frac{7}{4}$, 공차가 $\frac{3}{4}$인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합은?

① $\frac{167}{4}$ ② $\frac{235}{4}$ ③ $\frac{527}{4}$ ④ $\frac{1105}{4}$ ⑤ $\frac{1054}{4}$

해설

구하는 합을 $S_{17} = \dfrac{17\left\{2 \cdot \frac{7}{4} + (17-1) \cdot \frac{3}{4}\right\}}{2} = \dfrac{527}{4}$

7. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

㉠ $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \cdots$

㉡ $3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243, \cdots$

㉢ $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ 99999, \cdots$

㉣ $2,\ 3,\ 4,\ 9,\ 8,\ 27$

㉤ $\frac{4}{9},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{4}, \cdots$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉣
④ ㉡, ㉤ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3인 등비수열이다.

㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.

8. 다음 등비수열에서 (   ) 안에 알맞은 수는?

$32,\ -8,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ (\quad)$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{1}{18}$ ③ $-\frac{1}{24}$ ④ $-\frac{1}{32}$ ⑤ $-\frac{1}{64}$

해설

공비가 $-\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{32}$

9. 다음 설명 중 옳은 것은?

① -2는 -16의 네제곱근이다.

② 4는 16의 세제곱근이다.

③ 8의 세제곱근은 2뿐이다.

④ 81의 네제곱근은 3, -3이다.

⑤ -4는 -64의 세제곱근이다.

해설

① $(-2)^4 = 16 \neq -16$이므로 -2는 -16의 네제곱근이 아니다.
② $4^3 = 64 \neq 16$이므로 4는 16의 세제곱근이 아니다.
③ 8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3 = 8$이므로
$x^3 - 8 = 0$
$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{3}i$
따라서, 8의 세제곱근은 2 외에도 $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$가 있다.
④ 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4 = 81$이므로
$x^4 - 81 = 0$
$(x^2-9)(x^2+9) = 0$
$(x+3)(x-3)(x^2+9) = 0$
$\therefore x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$
따라서, 81의 네제곱근은 3, -3 외에도 $3i$, $-3i$가 있다.
⑤ $(-4)^3 = -64$이므로 -4는 -64의 세제곱근이다.

10. $\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$ 의 값을 구하면?

① 9　　② 3　　③ $\sqrt{3}$　　④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}} &= (3^2)^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{3}{2}} \times (3^{-1})^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{8}{3}-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}} \\ &= 3\end{aligned}$$

11. 양수 a에 대하여 $(a^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \div (a^{-\sqrt{54}})$를 간단히 하면?

① $a^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$　② $a^{\sqrt{2}}$　③ $a^{-\sqrt{16}}$　④ $a^{5\sqrt{6}}$　⑤ a^{36}

해설

지수를 따로 써 보면
$2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{54} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$
$= 5\sqrt{6}$
$\therefore\ a^{5\sqrt{6}}$

12. 다음 식의 값은?

$$2^2 \times 2^{-3}$$

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$2^2 \times 2^{-3} = 2^{2+(-3)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

13. 다음 식을 간단히 하면?(단, $a > 0$)

$$(a^5)^2 \div (a^2)^{-4}$$

① a^3 ② a^{18} ③ a^{21} ④ $\frac{1}{a^3}$ ⑤ $\frac{1}{a^6}$

해설

$(a^5)^2 \div (a^2)^{-4} = a^{10} \div a^{-8}$

$= a^{10-(-8)} = a^{18}$

14. $\log_2(x-4)^2$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x<1$ ② $x>3$ ③ $x<4$ ④ $x\neq 4$ ⑤ $x\neq 5$

해설

$(x-4)^2>0$ 로부터 $x\neq 4$

15. 양수 A 에 대하여 $\log A = -2.341$ 일 때, 정수 부분과 소수 부분을 바르게 나타낸 것은?

① 정수 부분 : -1, 소수 부분 : 0.659

② 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.341

③ 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.659

④ 정수 부분 : -3, 소수 부분 : 0.341

⑤ 정수 부분 : -3, 소수 부분 : 0.659

해설

$-2.341 = -2 - 0.341 = (-2-1) + (1-0.341)$

$= -3 + 0.659$

따라서 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.659 이다.

16. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{20}의 값은?

① 38　② 39　③ 41　④ 42　⑤ 43

해설

$a_{20} = S_{20} - S_{19}$

$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$

$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$

$\therefore\ a_{20} = 439 - 398 = 41$

17. 등차수열 10, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{99}, -390 에서 공차는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$b_1 = 10$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_2$, $\cdots$,
$b_{100} = a_{99}$, $b_{101} = -390$
$\therefore\ b_{101} = 10 + (101-1)\cdot d = -390$
$100d = -400$
$\therefore\ d = -4$

18. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가) 에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(\text{가})}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(\text{가})}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $(\text{가})=\frac{3}{2}$

19. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$S_5 = \dfrac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a + 2d = 5 \cdots$ ㉠

$S_7 = \dfrac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a + 3d = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d = 2,\ a = 1$

$\therefore\ S_{10} = \dfrac{10(2\cdot 1 + 9\cdot 2)}{2} = 100$

20. 3과 75의 등비중항을 x, 3과 75의 등차중항을 y라 할 때, $x+y$의 값은?

① 45 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 54

해설

x는 3과 75의 등비중항이므로
$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$
$\therefore\ x = 15$
y는 3과 75의 등차중항이므로
$2y = 3 + 75 = 78$
$\therefore\ y = 39$
$\therefore\ x + y = 15 + 39 = 54$

21. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$a+b+c+d=9+6+4+36=55$

22. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{\sum_{k=1}^{n}(2a_k - 3b_k + 5)\right\}$ 의 값은?

① 250　② 300　③ 450　④ 550　⑤ 650

해설

$\sum_{n=1}^{10} \left\{2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5\right\}$
$= \sum_{n=1}^{10}(2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$
$= \sum_{n=1}^{10}(20n - 15n + 5n)$
$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 550$

23. 다음 식의 값은?

$$\boxed{\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}}$$

① 9　　② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{99}-1$

④ $\sqrt{101}-1$　　⑤ 11

해설

(준식)$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-1=9$

24. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

(준 식)$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

25. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_9$ ② $a_{20}-a_{10}$ ③ $a_{21}-a_9$
④ $a_{21}-a_{10}$ ⑤ $a_{21}-a_{11}$

해설

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ 이므로
$a_{21} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20}$
$b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20}$
$= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots b_9)$
$= a_{21} - a_{10}$

26. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3,\ \frac{1}{a_2} = 6$이므로

$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n,\ a_n = \frac{1}{3n}$

$a_3 = \frac{1}{9},\ a_4 = \frac{1}{12} \quad \therefore\ a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$

27. $3^x = 2+\sqrt{2},\ 3^y = 2-\sqrt{2}$일 때, $x+y$의 값은?

① 1　　② $\log_4 3$　　③ $\log_3 2$

④ $\log_3 4$　　⑤ $\log_4 10$

해설

$x=\log_3(2+\sqrt{2}),\ y=\log_3(2-\sqrt{2})$이므로

$x+y=\log_3\left\{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})\right\}=\log_3 2$

28. $(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 12

④ $4\log_2 3$ ⑤ $6\log_2 5$

해설

밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 한 후 계산한다.

$$(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$$

$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{\log_2 4}\right) \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt[4]{21}}$$

$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{\log_2 2^2}\right) \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 21^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{2\log_2 2}\right) \cdot \frac{3\log_2 2}{\frac{1}{4}\log_2 21}$$

$$= (\log_2 3 + \log_2 7) \cdot \frac{12}{\log_2 21}$$

$$= \log_2 21 \cdot \frac{12}{\log_2 21} = 12$$

29. $3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7}$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7} = 3^{\log_3 4} = 4$

30. $\log_{10} 5 = a,\ \log_{10} 7 = b$라 할 때, 다음 중 $pa + qb + r$의 꼴로 나타낼 수 없는 것은? (단, p, q, r은 유리수)

① $\log_{10} 20$　② $\log_{10} 3.5$　③ $\log_{10} 75$

④ $\log_{10} \sqrt{14}$　⑤ 1

해설

$\log_{10} 75 = \log_{10} 25 \times 3 = \log_{10} 5^2 + \log_{10} 3$
$= 2 \cdot a + 0 \cdot b + \log_{10} 3$
$\log_{10} 3$은 유리수가 아니므로
$\log_{10} 75$는 $pa + qb + r(p,\ q,\ r$은유리수) 의 꼴로 나타낼 수 없다.

31. a, x, y가 양의 실수이고 $A = \log_a \dfrac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \dfrac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \dfrac{1}{x^5}$ ② $\log_a \dfrac{1}{y^5}$ ③ $\log_a \dfrac{1}{xy}$

④ $\log_a \dfrac{x^5}{y^5}$ ⑤ $\log_a \dfrac{x^5}{y^7}$

해설

$3A + 2B$

$= 3(2\log_a x - 3\log_a y) + 2(2\log_a y - 3\log_a x)$

$= -5\log_a y = \log_a \frac{1}{y^5}$

32. 함수 $f(x)$에 대하여 $f(20^x) = \frac{1}{x} - \log_3 5$일 때, $f(3)$의 값은?

① 1　② 3　③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$　⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$20^x = 3$이라 하면 $x = \log_{20} 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

33. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
$\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
$= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
$\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

34. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b,\ a,\ a+b$라 하면 세 수의 합이 12이므로

$(a-b)+a+(a+b)=12,\ 3a=12$

$\therefore a=4$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$(4-d)\times 4\times(4+d)=28,\ 16-d^2=7$

$d^2=9\ \ \therefore d=\pm 3$

따라서 구하는 세 수는 $1, 4, 7$이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

35. 2^n 을 3으로 나눈 나머지를 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12} a_k$ 의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$a_1 = 2^1$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_1 = 2$
$a_2 = 2^2$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_2 = 1$
$a_3 = 2^3$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_3 = 2$
$a_4 = 2^4$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_4 = 1$
$a_5 = 2^5$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_5 = 2$
즉 a_n 은 n 이 홀수일 때는 2
n 이 짝수일 때는 1
$\sum_{k=1}^{12} a_k = 6 \cdot (2+1) = 6 \cdot 3 = 18$

36. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \dfrac{n(1-x^n)}{2}$　　② $S = \dfrac{1-x^n}{2}$

③ $S = \dfrac{1-x^n}{2} - \dfrac{2x^n}{x}$　　④ $S = \dfrac{1-x^n}{1+x} - \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -)\ xS = & \quad\ \ x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x \end{array}$$

$= \dfrac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$

$\therefore S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

37. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $3-2^{12}$ ② $3-2^{11}$ ③ $3-2^{10}$

④ $3-2^{9}$ ⑤ $3-2^{8}$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$의 양변에 -3을 더하여 정리하면

$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 3 - 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 3 - 2^9$

38. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\cdots)$로 정의된다. 자연수의 집합에서 정의되는 함수 $f(n)$을 $f(n) = a_n$이라 할 때, 함수 $f(n)$의 주기는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = \dfrac{2+1}{3} = 1,\ a_4 = \dfrac{1+1}{2} = 1,\ a_5 = \dfrac{1+1}{1} = 2,$

$a_6 = \dfrac{2+1}{1} = 3,\ a_7 = \dfrac{3+1}{2} = 2,\ a_8 = \dfrac{2+1}{3} = 1,\ a_9 = \dfrac{1+1}{2} = 1,\ a_{10} = \dfrac{1+1}{1} = 2,\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 2, 1, 1, 2가 반복된다.

따라서 함수 $f(n) = a_n$의 주기는 5이다.

39. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $2k+1$ ② $2k-1$ ③ $2k$
④ $k+1$ ⑤ $k-1$

해설

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

40. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

> (i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
> (ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $2^k > k^2$
> 양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
> $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
> 따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$　② $n = 1,\ (k+1)^2$
③ $n = 5,\ (k-1)^2$　④ $n = 5,\ k^2$
⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
∴ ㉠ $n = 5$, ㉡ $(k+1)^2$

41. $\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$ 의 값은?

① 20　　② $\sqrt{401}$　　③ $\sqrt{402}$　　④ $\sqrt[4]{401}$　　⑤ $\sqrt[4]{402}$

해설

$\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$

$=\sqrt[4]{(\sqrt{401}+1)^2}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{401}-1)^2}$

$=\sqrt{\sqrt{401}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{401}-1}=\sqrt{401-1}=20$

42. 5^{40} 을 $a \times 10^n (1 < a < 10, n$ 은 정수$)$ 의 꼴로 나타낼 때, $\log a$ 의 소수 부분을 다음 상용로그표를 이용하여 구한것은?

수	0	1	2	3
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284
2.2	0.3234	0.3444	0.3464	0.3483
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674
2.4	0.3802	0.3820	0.3888	0.3856

① 0.064 ② 0.18 ③ 0.408 ④ 0.84 ⑤ 0.96

해설

$5^{40} = a \times 10^n$ 에서 양변에 상용로그를 취하면
$\log 5^{40} = \log(a \times 10^{40}) = n + \log a \cdots$ ㉠
$1 < a < 10$ 이므로 $0 < \log a < 1$ 이다.

$$\begin{aligned}\log 5^{40} &= 40 \log 5 = 40 \times (1 - \log 2) \\ &= 40 \times 0.6990 \\ &= 27.96\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서 $n = 27, \log a = 0.96$
따라서 $\log a$ 의 소수 부분은 0.96 이다.

43. $\sum_{k=1}^{40} \log_3 \dfrac{2k+1}{2k-1}$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

해설

$\sum_{k=1}^{40} \log_3 \dfrac{2k+1}{2k-1}$
$= \sum_{k=1}^{40} \left\{\log_3(2k+1) - \log_3(2k-1)\right\}$
$= (\log_3 3 - \log_3 1) + (\log_3 5 - \log_3 3) + \cdots + (\log_3 81 - \log_3 79)$
$= -\log_3 1 + \log_3 81 = 4$

44. $\sum_{k=1}^{n} = n^2 + 1$일 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a_5 = 9$

㉡ $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2n^2 + n$

㉢ $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = 2n^2 - n + 1$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 하면
$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2+1) - (4^2+1) = 9$(참)
㉡ $S_n = n^2 + 1$이므로
$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - \left\{(n-1)^2 + 1\right\}$
$= 2n - 1 (n \geq 2)$
$\therefore\ a_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1 (n \geq 1)$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2n^2 + n$(참)
㉢ $a_n = 2n - 1 (n \geq 2)$이고 $a_1 = S_1 = 2$이다. $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} =$
$2 + \sum_{k=2}^{n}\left\{2(2k-1) - 1\right\} = 2 + \sum_{k=2}^{n}(4k-3)$
$= 2 + \sum_{k=1}^{n}(4k-3) - 1 = 2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 3 - 1$
$= 1 + 4 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n + 1$(참)
따라서, 보기 중에서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

45. x에 대한 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 하고, 다음과 같이 수를 나열할 때, 제 10행에 나열된 수들의 합은?

제1행	1
제2행	$\omega,\ \omega^2$
제3행	$\omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5$
제4행	$\omega^6,\ \omega^7,\ \omega^8,\ \omega^9$
$\vdots$	

① 0　② 1　③ 2　④ ω　⑤ $\omega+1$

해설

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면
$(x-1)(x^2+x+1)=0 \ \therefore x^3=1$
$x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$
각 행의 첫 번째 숫자의 ω의 지수로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하고
$\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$$\begin{array}{llllll} \{a_n\}: & 0, & 1, & 3, & 6, & 10\cdots \\ & \bigvee & \bigvee & \bigvee & \bigvee & \\ \{b_n\}: & 1 & 2 & 3 & 4\cdots & \end{array}$$

계차수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=n$이므로
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=0+\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{(n-1)n}{2}$
$\therefore a_{10}=\dfrac{9\cdot 10}{2}=45$
따라서 제 10행에 나열된 수들의 합은
$\omega^{45}+\omega^{46}+\omega^{47}+\cdots+\omega^{54}$
$=\omega^{45}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{48}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{51}(1+\omega+\omega^2)+1$
$=1$

46. $a_1 = b_1 = 1$ 이고 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2,\ b_{n+1} - b_n = \log_2 a_n$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)
인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 b_{10} 의 값은?

① 37　② 39　③ 41　④ 43　⑤ 45

해설

$a_1 = 1$ 이고 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2 인 등비수열이다.

$\therefore\ a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$b_{n+1} - b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{n-1} = n - 1$

따라서, 수열의 일반항 b_n은 $n \geq 2$ 일 때

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)$

$= 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} - (n-1)$

$= \dfrac{n^2 - 3n + 4}{2}$

$\therefore\ b_{10} = \dfrac{10^2 - 3 \times 10 + 4}{2} = 37$

47. $a^{3x} - a^{-3x} = 6\sqrt{3}$(단, $a > 0$) 일 때, $a^x - a^{-x} = m$ 이고 $a^{2x} - a^{-2x} = n$ 이다. 이때, $m^2 + n^2$ 의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

$a^{3x} - a^{-3x} = (a^x - a^{-x})^3 + 3(a^x - a^{-x}) = 6\sqrt{3}$ 에서
$m^3 + 3m - 6\sqrt{3} = 0$
$(m - \sqrt{3})(m^2 + \sqrt{3}m + 6) = 0$
$\therefore\ m = \sqrt{3}$
또, $(a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4 = (\sqrt{3})^2 + 4 = 7$ 에서
$a^x + a^{-x} = \sqrt{7}$
따라서 $n = a^{2x} - a^{-2x} = (a^x + a^{-x})(a^x - a^{-x})$
$= \sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{21}$
$\therefore\ m^2 + n^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{21}^2 = 24$

48. $\log_2 5$ 의 정수부분을 x, 소수부분을 y라 할 때, $\dfrac{2^{-x}+2^{-y}}{2^x+2^y}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$ 이므로

$x = 2,\ y = \log_2 5 - 2 = \log_2 \frac{5}{4}$

$2^{-x} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4},\ 2^x = 4$

$2^{-y} = 2^{-\log_2 \frac{5}{4}} = 2^{\log_2 (\frac{5}{4})^{-1}} = 2^{\log_2 \frac{4}{5}} = \dfrac{4}{5}$

$2^y = 2^{\log_2 \frac{5}{4}} = \dfrac{5}{4}$

$\therefore\ \dfrac{2^{-x}+2^{-y}}{2^x+2^y} = \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{4}{5}}{4+\frac{5}{4}} = \dfrac{\frac{21}{20}}{\frac{21}{4}} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

49. A^{100} 이 110자리의 자연수일 때, $\frac{1}{A^8}$ 은 소수점 아래 n 번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다. 이때, n 의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

A^{100} 이 110자리의 자연수이므로 A^{100} 의 지표는 109이다.

$109 \le \log A^{100} < 100$

$\frac{109}{100} \le \log A < \frac{110}{100}$

$\therefore 1.09 \le \log A < 1.10 \cdots$ ㉠

$\log \frac{1}{A^8} = -8 \log A$ 이므로 ㉠에서

$-8.8 < -8 \log A \le -8.72$

$\therefore \bar{9}.2 < \log \frac{1}{A^8} \le \bar{9}.28$

따라서 $\log \frac{1}{A^8}$ 의 지표가 -9 이므로 $\frac{1}{A^8}$ 은 소수점 아래 9번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

50. 어느 지역의 바다에서 수면으로부터 dm 인 곳에서의 빛의 세기를 $L(d)$ 라 하면 $L(d+12)=\frac{3}{10}L(d)$ 의 관계식이 성립한다고 한다. 이 바다에서 수면에서의 빛의 세기의 10% 인 곳의 수심을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값을 구하면? (단, $\log 3 = 0.48$ 으로 계산한다.)

① 23m ② 25m ③ 27m ④ 29m ⑤ 31m

해설

$L(d+12)=\frac{3}{10}L(d)$ 에서

$L(12)=\frac{3}{10}L(0)$

$L(24)=\frac{3}{10}L(12)=\left(\frac{3}{10}\right)^2 L(0)$

$L(36)=\frac{3}{10}L(24)=\left(\frac{3}{10}\right)^3 L(0)$

$\vdots$

이므로 $L(12d)=\left(\frac{3}{10}\right)^d L(0)$ 이 성립한다.

$\therefore L(d)=\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{d}{12}} L(0)$

수면에서의 빛의 세기의 10% 인 곳의 수심을 xm 라 하면

$\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{x}{12}} L(0)=\frac{1}{10}L(0)$이므로 $\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{x}{12}}=\frac{1}{10}$

로그의 정의에 의하여

$\frac{x}{12}\log\frac{3}{10}=\log\frac{1}{10}$, $\frac{x}{12}(\log 3-1)=-1$

$\therefore x=\frac{-12}{\log 3-1}=\frac{-12}{0.48-1}\fallingdotseq 23.07$

따라서, 구하는 수심은 약 23m 이다.