

1. 다음 ()안에 알맞은 수는?

1, 5, 9, (), 17

① 10

② 11

③ 13

④ 14

⑤ 16

해설

나열된 각 수는 $4n + 1$ 의 꼴이다.

따라서 ()안에 들어갈 수는 $9 + 4 = 13$ 이다.

2. 수열 $-1, 3, -5, 7, -9, \dots$ 의 7번째 항은?

① -13

② -10

③ 11

④ -11

⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 6번째 항은 11 , 7번째 항은 -13 이다.

3. 첫째항이 -10 , 공차가 -3 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-3n - 7$

② $-3n - 5$

③ $-n - 7$

④ $-n - 5$

⑤ $-n + 3$

해설

$$a_n = -10 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n - 7$$

4. 등차수열 $10, 6, 2, -2, -6, \dots$ 에서 공차를 d , 제 10 항을 b 라 할 때, $b + d$ 의 값은?

① -10

② -20

③ -30

④ -40

⑤ -50

해설

공차는 -4 이므로 $d = -4$

$$a_n = 10 + (n - 1)(-4) = -4n + 14$$

$$\therefore a_{10} = -4 \cdot 10 + 14 = -26 \text{ 에서 } b = -26$$

$$\therefore b + d = -26 + (-4) = -30$$

5. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27

② 10, 23, 29

③ 11, 23, 27

④ 11, 23, 29

⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2} = 11$, 이 수열의 공차는 6이다.

따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

6. 첫째항이 $\frac{7}{4}$, 공차가 $\frac{3}{4}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 17 항까지의 합은?

① $\frac{167}{4}$

② $\frac{235}{4}$

③ $\frac{527}{4}$

④ $\frac{1105}{4}$

⑤ $\frac{1054}{4}$

해설

구하는 합을 $S_{17} = \frac{17 \left\{ 2 \cdot \frac{7}{4} + (17 - 1) \cdot \frac{3}{4} \right\}}{2} = \frac{527}{4}$

7. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

㉠ 1, 4, 9, 16, 25, ...

㉡ 3, 9, 27, 81, 243, ...

㉢ 9, 99, 999, 9999, 99999, ...

㉣ 2, 3, 4, 9, 8, 27

㉤ $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉤

⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3인 등비수열이다.

㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

8. 다음 등비수열에서 ()안에 알맞은 수는?

$$32, -8, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, ()$$

① $-\frac{1}{16}$

② $-\frac{1}{18}$

③ $-\frac{1}{24}$

④ $-\frac{1}{32}$

⑤ $-\frac{1}{64}$

해설

공비가 $-\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{32}$$

9. 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① -2 는 -16 의 네제곱근이다.
- ② 4 는 16 의 세제곱근이다.
- ③ 8 의 세제곱근은 2 뿐이다.
- ④ 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 이다.
- ⑤ -4 는 -64 의 세제곱근이다.

해설

① $(-2)^4 = 16 \neq -16$ 이므로 -2 는 -16 의 네제곱근이 아니다.

② $4^3 = 64 \neq 16$ 이므로 4 는 16 의 세제곱근이 아니다.

③ 8 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 8$ 이므로

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

따라서, 8 의 세제곱근은 2 외에도 $-1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$ 가 있다.

④ 81 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로

$$x^4 - 81 = 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$

$$(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 3 \text{ 또는 } x = \pm 3i$$

따라서, 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 외에도 $3i, -3i$ 가 있다.

⑤ $(-4)^3 = -64$ 이므로 -4 는 -64 의 세제곱근이다.

10. $\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$ 의 값을 구하면?

① 9

② 3

③ $\sqrt{3}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}} &= (3^2)^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{3}{2}} \times (3^{-1})^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{1}{6}} \\ &= 3\end{aligned}$$

11. 양수 a 에 대하여 $(a^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \div (a^{-\sqrt{54}})$ 를 간단히 하면?

① $a^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$

② $a^{\sqrt{2}}$

③ $a^{-\sqrt{16}}$

④ $a^{5\sqrt{6}}$

⑤ a^{36}

해설

지수를 따로 써 보면

$$2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{54} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$$

$$= 5\sqrt{6}$$

$$\therefore a^{5\sqrt{6}}$$

12. 다음 식의 값은?

$$2^2 \times 2^{-3}$$

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

$$2^2 \times 2^{-3} = 2^{2+(-3)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

13. 다음 식을 간단히 하면?(단, $a > 0$)

$$(a^5)^2 \div (a^2)^{-4}$$

① a^3

② a^{18}

③ a^{21}

④ $\frac{1}{a^3}$

⑤ $\frac{1}{a^6}$

해설

$$\begin{aligned}(a^5)^2 \div (a^2)^{-4} &= a^{10} \div a^{-8} \\ &= a^{10-(-8)} = a^{18}\end{aligned}$$

14. $\log_2(x-4)^2$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x < 1$

② $x > 3$

③ $x < 4$

④ $x \neq 4$

⑤ $x \neq 5$

해설

$$(x-4)^2 > 0 \text{로부터 } x \neq 4$$

15. 양수 A 에 대하여 $\log A = -2.341$ 일 때, 정수 부분과 소수 부분을 바르게 나타낸 것은?

① 정수 부분 : -1 , 소수 부분 : 0.659

② 정수 부분 : -2 , 소수 부분 : 0.341

③ 정수 부분 : -2 , 소수 부분 : 0.659

④ 정수 부분 : -3 , 소수 부분 : 0.341

⑤ 정수 부분 : -3 , 소수 부분 : 0.659

해설

$$\begin{aligned}-2.341 &= -2 - 0.341 = (-2 - 1) + (1 - 0.341) \\ &= -3 + 0.659\end{aligned}$$

따라서 정수 부분은 -3 , 소수 부분은 0.659 이다.

16. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{20} 의 값은?

① 38

② 39

③ 41

④ 42

⑤ 43

해설

$$a_{20} = S_{20} - S_{19}$$

$$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$$

$$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$$

$$\therefore a_{20} = 439 - 398 = 41$$

17. 등차수열 10, a_1 , a_2 , a_3 , $\cdots$, a_{99} , -390 에서 공차는?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$b_1 = 10, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \cdots,$$

$$b_{100} = a_{99}, b_{101} = -390$$

$$\therefore b_{101} = 10 + (101 - 1) \cdot d = -390$$

$$100d = -400$$

$$\therefore d = -4$$

18. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{1}{(가)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \therefore (가) = \frac{3}{2}$$

19. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$ 일 때, S_{10} 의 값은?

① 64

② 80

③ 92

④ 100

⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 25 \text{ 에서 } a + 2d = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2} = 49 \text{ 에서 } a + 3d = 7 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$d = 2, a = 1$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

20. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

21. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a + b + c + d$ 의 값은?(단, a, b, c, d 는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

- ① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$$a + b + c + d = 9 + 6 + 4 + 36 = 55$$

22. $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \right\}$ 의 값은?

① 250

② 300

③ 450

④ 550

⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \left\{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

23. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

① 9

② $3\sqrt{11} - \sqrt{2}$

③ $\sqrt{99} - 1$

④ $\sqrt{101} - 1$

⑤ 11

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\&= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\&= \sqrt{100} - 1 = 9\end{aligned}$$

24. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} \\&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \\&= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

25. 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$ 과 같은 것은?

① $a_{20} - a_9$

② $a_{20} - a_{10}$

③ $a_{21} - a_9$

④ $a_{21} - a_{10}$

⑤ $a_{21} - a_{11}$

해설

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ 이므로}$$

$$a_{21} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20}$$

$$b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20}$$

$$= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_9)$$

$$= a_{21} - a_{10}$$

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$ 의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{6}, a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1, 2, 3)$$

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{5}{12}$

③ $\frac{7}{16}$

④ $\frac{5}{24}$

⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$ 은 조화수열이다. 따라서

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3$, $\frac{1}{a_2} = 6$ 이므로

$$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n, a_n = \frac{1}{3n}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{12} \quad \therefore a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$$

27. $3^x = 2 + \sqrt{2}$, $3^y = 2 - \sqrt{2}$ 일 때, $x + y$ 의 값은?

① 1

② $\log_4 3$

③ $\log_3 2$

④ $\log_3 4$

⑤ $\log_4 10$

해설

$$x = \log_3(2 + \sqrt{2}), y = \log_3(2 - \sqrt{2}) \text{ 이므로}$$

$$x + y = \log_3 \{ (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) \} = \log_3 2$$

28. $(\log_2 3 + 2\log_4 7) \log_{\sqrt[4]{21}} 8$ 의 값은?

① 4

② 6

③ 12

④ $4\log_2 3$

⑤ $6\log_2 5$

해설

밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 한 후 계산한다.

$$\begin{aligned} & (\log_2 3 + 2\log_4 7) \log_{\sqrt[4]{21}} 8 \\ &= \left(\log_2 3 + 2 \frac{\log_2 7}{\log_2 4} \right) \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt[4]{21}} \\ &= \left(\log_2 3 + 2 \frac{\log_2 7}{\log_2 2^2} \right) \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 21^{\frac{1}{4}}} \\ &= \left(\log_2 3 + 2 \frac{\log_2 7}{2\log_2 2} \right) \cdot \frac{3\log_2 2}{\frac{1}{4}\log_2 21} \\ &= (\log_2 3 + \log_2 7) \cdot \frac{12}{\log_2 21} \\ &= \log_2 21 \cdot \frac{12}{\log_2 21} = 12 \end{aligned}$$

29. $3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7}$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

$$3^{\log_3 \frac{4}{7} + \log_3 7} = 3^{\log_3 4} = 4$$

30. $\log_{10} 5 = a$, $\log_{10} 7 = b$ 라 할 때, 다음 중 $pa + qb + r$ 의 꼴로 나타낼 수 없는 것은? (단, p, q, r 은 유리수)

① $\log_{10} 20$

② $\log_{10} 3.5$

③ $\log_{10} 75$

④ $\log_{10} \sqrt{14}$

⑤ 1

해설

$$\log_{10} 75 = \log_{10} 25 \times 3 = \log_{10} 5^2 + \log_{10} 3$$

$$= 2 \cdot a + 0 \cdot b + \log_{10} 3$$

$\log_{10} 3$ 은 유리수가 아니므로

$\log_{10} 75$ 는 $pa + qb + r$ (p, q, r 은 유리수)의 꼴로 나타낼 수 없다.

31. a, x, y 가 양의 실수이고 $A = \log_a \frac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \frac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$ 와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$

② $\log_a \frac{1}{y^5}$

③ $\log_a \frac{1}{xy}$

④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$

⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$$3A + 2B$$

$$= 3(2 \log_a x - 3 \log_a y) + 2(2 \log_a y - 3 \log_a x)$$

$$= -5 \log_a y = \log_a \frac{1}{y^5}$$

32. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(20^x) = \frac{1}{x} - \log_3 5$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$

⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$$20^x = 3 \text{ 이라 하면 } x = \log_{20} 3$$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

33. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80

② 4.04

③ 4.28

④ 4.32

⑤ 4.43

해설

$$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80 \text{ 이고}$$

$$\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$$

$$= \log 0.063 \text{ 이므로 } b = 0.063$$

$$\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$$

34. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b$, a , $a+b$ 라 하면 세 수의 합이 12이므로

$$(a-b) + a + (a+b) = 12, 3a = 12$$

$$\therefore a = 4$$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = 28, 16 - d^2 = 7$$

$$d^2 = 9 \therefore d = \pm 3$$

따라서 구하는 세 수는 1, 4, 7이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

35. 2^n 을 3으로 나눈 나머지를 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12} a_k$ 의 값은?

① 16

② 17

③ 18

④ 19

⑤ 20

해설

$a_1 = 2^1$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_1 = 2$

$a_2 = 2^2$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_2 = 1$

$a_3 = 2^3$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_3 = 2$

$a_4 = 2^4$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_4 = 1$

$a_5 = 2^5$ 을 3으로 나눈 나머지 $a_5 = 2$

즉 a_n 은 n 이 홀수일 때는 2

n 이 짝수일 때는 1

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = 6 \cdot (2 + 1) = 6 \cdot 3 = 18$$

36. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

$$\textcircled{1} S = \frac{n(1-x^n)}{2}$$

$$\textcircled{2} S = \frac{1-x^n}{2}$$

$$\textcircled{3} S = \frac{1-x^n}{2} - \frac{2x^n}{x}$$

$$\textcircled{4} S = \frac{1-x^n}{1+x} - \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$$

$$\textcircled{5} S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x 를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -) xS &= x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x^n \end{aligned}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

37. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① $3 - 2^{12}$

② $3 - 2^{11}$

③ $3 - 2^{10}$

④ $3 - 2^9$

⑤ $3 - 2^8$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$ 의 양변에 -3 을 더하여 정리하면

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 - 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 3 - 2^9$$

38. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된다. 자연수의 집합에서 정의되는 함수 $f(n)$ 을 $f(n) = a_n$ 이라 할 때, 함수 $f(n)$ 의 주기는?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = \frac{2+1}{3} = 1, a_4 = \frac{1+1}{2} = 1, a_5 = \frac{1+1}{1} = 2,$$

$$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3, a_7 = \frac{3+1}{2} = 2, a_8 = \frac{2+1}{3} = 1, a_9 = \frac{1+1}{2} = 1, a_{10} = \frac{1+1}{1} = 2, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 3, 2, 1, 1, 2가 반복된다.

따라서 함수 $f(n) = a_n$ 의 주기는 5이다.

39. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ 이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

이 식의 양변에 □을 더하면

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \square = (k + 1)^2$ 이므로

$n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $2k + 1$

② $2k - 1$

③ $2k$

④ $k + 1$

⑤ $k - 1$

해설

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

이 식의 양변에 $2k + 1$ 을 더하면

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + 2k + 1 = (k + 1)^2$ 이므로

$n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

40. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n = k (k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$

양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$

$k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$

따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = 1, k^2$

② $n = 1, (k+1)^2$

③ $n = 5, (k-1)^2$

④ $n = 5, k^2$

⑤ $n = 5, (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n = k (k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$

양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$

$k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$

따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$\therefore$ ㉠ $n = 5$, ㉡ $(k+1)^2$

41. $\sqrt[4]{402 + 2\sqrt{401}} \cdot \sqrt[4]{402 - 2\sqrt{401}}$ 의 값은?



① 20

② $\sqrt{401}$

③ $\sqrt{402}$

④ $\sqrt[4]{401}$

⑤ $\sqrt[4]{402}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{402 + 2\sqrt{401}} \cdot \sqrt[4]{402 - 2\sqrt{401}} \\ &= \sqrt[4]{(\sqrt{401} + 1)^2} \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{401} - 1)^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{401} + 1} \cdot \sqrt{\sqrt{401} - 1} = \sqrt{401 - 1} = 20 \end{aligned}$$

42. 5^{40} 을 $a \times 10^n$ ($1 < a < 10, n$ 은 정수)의 꼴로 나타낼 때, $\log a$ 의 소수 부분을 다음 상용로그표를 이용하여 구한것은?

수	0	1	2	3
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284
2.2	0.3234	0.3444	0.3464	0.3483
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674
2.4	0.3802	0.3820	0.3888	0.3856

- ① 0.064 ② 0.18 ③ 0.408 ④ 0.84 ⑤ 0.96

해설

$5^{40} = a \times 10^n$ 에서 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 5^{40} = \log(a \times 10^{40}) = n + \log a \cdots \text{㉠}$$

$1 < a < 10$ 이므로 $0 < \log a < 1$ 이다.

$$\begin{aligned} \log 5^{40} &= 40 \log 5 = 40 \times (1 - \log 2) \\ &= 40 \times 0.6990 \\ &= 27.96 \end{aligned}$$

이므로 ㉠에서 $n = 27, \log a = 0.96$

따라서 $\log a$ 의 소수 부분은 0.96이다.

43. $\sum_{k=1}^{40} \log_3 \frac{2k+1}{2k-1}$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 9

해설

$$\sum_{k=1}^{40} \log_3 \frac{2k+1}{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{40} \{ \log_3(2k+1) - \log_3(2k-1) \}$$

$$= (\log_3 3 - \log_3 1) + (\log_3 5 - \log_3 3) + \cdots + (\log_3 81 - \log_3 79)$$

$$= -\log_3 1 + \log_3 81 = 4$$

44. $\sum_{k=1}^n = n^2 + 1$ 일 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a_5 = 9$

㉡ $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 2n^2 + n$

㉢ $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 2n^2 - n + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면

$$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 1) - (4^2 + 1) = 9 \text{ (참)}$$

㉡ $S_n = n^2 + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - \{(n-1)^2 + 1\} \\ &= 2n - 1 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1 \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_{2k} = \sum_{k=1}^n (4k-1) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2n^2 + n \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \text{㉢ } a_n &= 2n - 1 \quad (n \geq 2) \text{ 이고 } a_1 = S_1 = 2 \text{ 이다. } \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \{2(2k-1) - 1\} = 2 + \sum_{k=2}^n (4k-3) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^n (4k-3) - 1 = 2 + 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 3 - 1 \end{aligned}$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n + 1 \text{ (참)}$$

따라서, 보기 중에서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

45. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 하고, 다음과 같이 수를 나열할 때, 제 10행에 나열된 수들의 합은?

제1행 1
제2행 ω, ω^2
제3행 $\omega^3, \omega^4, \omega^5$
제4행 $\omega^6, \omega^7, \omega^8, \omega^9$
⋮

① 0

② 1

③ 2

④ ω

⑤ $\omega + 1$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변에 $x - 1$ 을 곱하면

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \therefore x^3 = 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

각 행의 첫 번째 숫자의 ω 의 지수로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하고

$\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$$\{a_n\} : 0, 1, 3, 6, 10 \dots$$

$$\quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$$

$$\{b_n\} : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \dots$$

계차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n = n$ 이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 0 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

따라서 제 10행에 나열된 수들의 합은

$$\omega^{45} + \omega^{46} + \omega^{47} + \dots + \omega^{54}$$

$$= \omega^{45}(1 + \omega + \omega^2) + \omega^{48}(1 + \omega + \omega^2) + \omega^{51}(1 + \omega + \omega^2) + 1$$

$$= 1$$

46. $a_1 = b_1 = 1$ 이고 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, $b_{n+1} - b_n = \log_2 a_n$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)
인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 b_{10} 의 값은?

①

37

② 39

③ 41

④ 43

⑤ 45

해설

$a_1 = 1$ 이고 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2
인 등비수열이다.

$$\therefore a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$b_{n+1} - b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{n-1} = n - 1$$

따라서, 수열의 일반항 b_n 은 $n \geq 2$ 일 때

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k - 1)$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

$$\therefore b_{10} = \frac{10^2 - 3 \times 10 + 4}{2} = 37$$

47. $a^{3x} - a^{-3x} = 6\sqrt{3}$ (단, $a > 0$) 일 때, $a^x - a^{-x} = m$ 이고 $a^{2x} - a^{-2x} = n$ 이다. 이때, $m^2 + n^2$ 의 값은?

① 20

② 21

③ 22

④ 23

⑤ 24

해설

$$a^{3x} - a^{-3x} = (a^x - a^{-x})^3 + 3(a^x - a^{-x}) = 6\sqrt{3} \text{에서}$$

$$m^3 + 3m - 6\sqrt{3} = 0$$

$$(m - \sqrt{3})(m^2 + \sqrt{3}m + 6) = 0$$

$$\therefore m = \sqrt{3}$$

$$\text{또, } (a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4 = (\sqrt{3})^2 + 4 = 7 \text{에서}$$

$$a^x + a^{-x} = \sqrt{7}$$

$$\text{따라서 } n = a^{2x} - a^{-2x} = (a^x + a^{-x})(a^x - a^{-x})$$

$$= \sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{21}$$

$$\therefore m^2 + n^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{21}^2 = 24$$

48. $\log_2 5$ 의 정수부분을 x , 소수부분을 y 라 할 때, $\frac{2^{-x} + 2^{-y}}{2^x + 2^y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 2

해설

$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$ 이므로

$$x = 2, y = \log_2 5 - 2 = \log_2 \frac{5}{4}$$

$$2^{-x} = 2^{-2} = \frac{1}{4}, 2^x = 4$$

$$2^{-y} = 2^{-\log_2 \frac{5}{4}} = 2^{\log_2 (\frac{5}{4})^{-1}} = 2^{\log_2 \frac{4}{5}} = \frac{4}{5}$$

$$2^y = 2^{\log_2 \frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{2^{-x} + 2^{-y}}{2^x + 2^y} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{4}{5}}{4 + \frac{5}{4}} = \frac{\frac{21}{20}}{\frac{21}{4}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

49. A^{100} 이 110자리의 자연수일 때, $\frac{1}{A^8}$ 은 소수점 아래 n 번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다. 이때, n 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

A^{100} 이 110자리의 자연수이므로 A^{100} 의 지표는 109이다.

$$109 \leq \log A^{100} < 100$$

$$\frac{109}{100} \leq \log A < \frac{110}{100}$$

$$\therefore 1.09 \leq \log A < 1.10 \cdots \textcircled{7}$$

$$\log \frac{1}{A^8} = -8 \log A \text{ 이므로 } \textcircled{7} \text{에서}$$

$$-8.8 < -8 \log A \leq -8.72$$

$$\therefore \bar{9}.2 < \log \frac{1}{A^8} \leq \bar{9}.28$$

따라서 $\log \frac{1}{A^8}$ 의 지표가 -9 이므로 $\frac{1}{A^8}$ 은 소수점 아래 9 번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

50. 어느 지역의 바다에서 수면으로부터 $d\text{m}$ 인 곳에서의 빛의 세기를 $L(d)$ 라 하면 $L(d+12) = \frac{3}{10}L(d)$ 의 관계식이 성립한다고 한다. 이 바다에서 수면에서의 빛의 세기의 10% 인 곳의 수심을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값을 구하면? (단, $\log 3 = 0.48$ 으로 계산한다.)

- ① 23m ② 25m ③ 27m ④ 29m ⑤ 31m

해설

$$L(d+12) = \frac{3}{10}L(d) \text{ 에서}$$

$$L(12) = \frac{3}{10}L(0)$$

$$L(24) = \frac{3}{10}L(12) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 L(0)$$

$$L(36) = \frac{3}{10}L(24) = \left(\frac{3}{10}\right)^3 L(0)$$

$\vdots$

$$\text{이므로 } L(12d) = \left(\frac{3}{10}\right)^d L(0) \text{ 이 성립한다.}$$

$$\therefore L(d) = \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{d}{12}} L(0)$$

수면에서의 빛의 세기의 10% 인 곳의 수심을 $x\text{m}$ 라 하면

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{x}{12}} L(0) = \frac{1}{10}L(0) \text{ 이므로 } \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{x}{12}} = \frac{1}{10}$$

로그의 정의에 의하여

$$\frac{x}{12} \log \frac{3}{10} = \log \frac{1}{10}, \quad \frac{x}{12} (\log 3 - 1) = -1$$

$$\therefore x = \frac{-12}{\log 3 - 1} = \frac{-12}{0.48 - 1} \approx 23.07$$

따라서, 구하는 수심은 약 23m 이다.