1. 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이 세 수의 평균은 8이고 분산이 6일 때, 곱 abc의 값은?

① 360 ② 384 ③ 400 ④ 440 ⑤ 510

해설

세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$a = b - d,\ c = b + d$이므로

$$\frac{(b-d)+b+(b+d)}{3} = 8$$

$\therefore b = 8$

$\therefore a = 8 - d,\ b = 8,\ c = 8 + d$

세 수의 분산이 6이므로

$$\frac{(8-d-8)^2+(8-8)^2+(8+d-8)^2}{3} = 6$$

$\therefore d^2 = 9,\ d = \pm 3$

$\therefore a = 5,\ b = 8,\ c = 11$ 또는 $a = 11,\ b = 8,\ c = 5$

$\therefore abc = 440$

2. $a_5 = 27,\ a_{11} = 15$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 27$

$a_{11} = a + 10d = 15$

연립하여 풀면 $d = -2,\ a = 35$

$\therefore\ a_n = 35 + (n-1) \times (-2) = -2n + 37$

$-2n + 37 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면

$37 < 2n, \quad 18.5 < n$

$\therefore\ n = 19$

$\therefore\ \{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19}이다.

3. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9 인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3 인 등차수열의 일반항은
$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$이므로 공차가 9 인 등차수열 ∴ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

㉢ $$\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b) = 6n + 3 + b$$
이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

4. 첫째항이 -10인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 7항까지의 합과 제 7항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$S_7 = a_7$

$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2}$

$a_7 = a+6d$

$\frac{7(2a+6d)}{2} = a+6d$

$7a+21d = a+6d$

$6a = -15d$

$d = \frac{6\times(-10)}{-15} = 4$

$\therefore S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2}$

$= \frac{10(-20+36)}{2}$

$= \frac{160}{2} = 80$

5. 첫째항부터 제4항까지의 합이 38, 첫째항부터 제10항까지의 합이 185인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은?

① 660 ② 670 ③ 680 ④ 690 ⑤ 600

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_4 = \dfrac{4(2a+3d)}{2} = 38$

$\therefore\ 2a+3d = 19 \cdots$ ㉠

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2} = 185$

$\therefore\ 2a+9d = 37 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ d=3$

$\therefore\ S_{20} = \dfrac{20\left\{2\times5+(20-1)\times3\right\}}{2} = 670$

6. 50과 100 사이의 자연수 중 3의 배수의 총합은?

① 1176 ② 1200 ③ 1225 ④ 1275 ⑤ 1300

해설

50 ~ 100 사이의 3의 배수는
51에서 시작하여 99로 끝나는
공차가 3인 등차수열이므로

$$\frac{(33-17+1)(51+99)}{2}$$

$$= \frac{17 \cdot 150}{2} = 1275$$

7. 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n = n^2 + 3n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_5 + a_{10}$의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

해설

주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구한다.
$n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\}$
$= 2n + 2$ ⋯⋯ ㉠
$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$
이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 2n + 2$
$\therefore a_1 + a_5 + a_{10} = 4 + 12 + 22 = 38$

8. 각 항이 실수이고, 제2항이 8, 제5항이 64인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① 2^9　② 2^{10}　③ 2^{11}　④ 2^{12}　⑤ 2^{13}

해설

첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_2 = ar = 8 \ \cdots\cdots$ ㉠

$a_5 = ar^4 = 64 \ \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡으로 나누면 $r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$

㉠으로부터 $a = 4$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \therefore a_{10} = 2^{11}$

9. 삼차방정식 $x^3-7x^2+kx-8=0$의 세 근이 등비수열을 이룰 때, 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=7$에서

$a(1+r+r^2)=7$ ⋯⋯ ㉠

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+a\cdot ar^2=k$에서

$a^2r(1+r+r^2)=k$ ⋯⋯ ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=9$에서 $(ar)^3=8$

$\therefore ar=2$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$k=a(1+r+r^2)\cdot ar=7\times 2=14$

$\therefore k=14$

10. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n$ 이라 할 때, $a_1 = 1,\ S_n = a_{n+1} + n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{11} 의 값은?

① $1-2^7$ ② $1-2^8$ ③ $1-2^9$
④ $1-2^{10}$ ⑤ $1-2^{11}$

해설

$S_n = a_{n+1} + n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots$ ㉠
$S_{n-1} = a_n + (n-1)(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \cdots$ ㉡
㉠−㉡을 하면 $a_n = a_{n+1} - a_n + 1$
$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n - 1(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$
양변에 -1을 더하여 정리하면 $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$
즉, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_2 - 1$, 공비가 2인 등비수열 이므로
$a_n - 1 = (a_2 - 1) \cdot 2^{n-2}(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$S_1 = a_2 + 1$ 이고, $S_1 = a_1 = 1$ 이므로 $a_2 = 0$
따라서, $a_n = 1 - 2^{n-2}(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ 이므로
$a_{11} = 1 - 2^9$

11. 다음 중 $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k$ 의 값과 같은 것은?

① $\sum_{k=1}^{10} 2k$　　② $\sum_{k=1}^{20} k$　　③ $\sum_{k=6}^{10} 5k$

④ $\sum_{k=1}^{10} k^2$　　⑤ $\sum_{k=1}^{10} (k^2 + k)$

해설

$\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k$
$= (1+2+3+4+\cdots+10) + (2+3+4+\cdots+10) + (3+4+\cdots+10) + \cdots + 10$
$= 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + \cdots + 10\cdot 10 = \sum_{k=1}^{10} k^2$

12. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$
$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$
$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$
$= 3\sum_{k=1}^{10} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k$
$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 1155 - 110$
$= 1045$

13. 방정식 $x^3 - 1 = 0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\sum_{k=1}^{3}(\alpha^k + \beta^k)$의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$에서 두 허근 α, β는
$x^2 + x + 1 = 0$의 근이므로
$\alpha + \beta = -1,\ \alpha\beta = 1,\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 2$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{3}(\alpha^k + \beta^k) = (\alpha+\beta) + (\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^3+\beta^3)$
$= (-1) + (-1) + 2 = 0$

14. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ 의 값은?

① $\sqrt{n-1}-1$　② $\sqrt{n+1}-1$　③ $\sqrt{n+1}$

④ $\sqrt{n+1}+1$　⑤ $\sqrt{2n+1}+1$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

따라서

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1}-1$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$　② $\frac{20}{21}$　③ $\frac{31}{21}$　④ $\frac{40}{21}$　⑤ $\frac{50}{21}$

해설

(준 식)$=\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\cdot\beta_n}$

$=\sum_{n=1}^{10}\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$=4\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

16. 수열 1, 3, 7, 13, 21, $\cdots$ 의 일반항을 a_n, 계차수열의 일반항을 b_n 이라 할 때, 다음 조건에서 [㉠] + [㉡] 의 값은?

I. 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이[㉠], 공차가 2인 등차수열이다
II. $a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9} 2k = $ [㉡]

① 91　　② 93　　③ 95　　④ 97　　⑤ 99

해설

1, 3, 7, 13, 21, $\cdots$

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$

2, 4, 6, 8, $\cdots$

$b_n = 2n$ $\therefore$ [㉠] $= 2$

$a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9} 2k = 1 + 2 \cdot \dfrac{9 \cdot 10}{2}$

$= 1 + 90 = 91$ $\therefore$ [㉡] $= 91$

㉠+㉡$= 2 + 91 = 93$

17. $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=1,\ a_{n+9}-a_{n+2}=35$ 가 성립할 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$a_{n+9}=a_{n+2}+7d$ 에서 $7d=35$

$\therefore\ d=5$

$\therefore\ a_{100}=1+99\cdot 5=496$

18. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$\vdots$

$+\ a_n = a_{n-1} + (n-1)$

$a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1)$

$= -1 + \dfrac{(n-1) \cdot n}{2}$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2} = -1 + 45 = 44$$

19. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{20}의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$　② $2 \cdot 3^{19} + 1$　③ $2 \cdot 3^{20} - 1$
④ $2 \cdot 3^{20} + 1$　⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$꼴로 변형한다.
$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면
$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$에서
$-2\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = -1$
즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$
따라서 수열 $\{a_n + 1\}$은
첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$이고 공비가 3인 등비수열이므로
$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$
$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$
$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

20. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$
양변에 (㉠)^{3}을 더하면
$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
$= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4}$
$= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2$
따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

(i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^{3}을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$
$\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$
$\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$

21. $a > 0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$　　② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$　　④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$

22. 다음 중 세 수 $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$ 을 작은 수부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$
② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$
③ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$
④ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$
⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$

해설

거듭제곱의 성질을 이용하여 $\sqrt[12]{N}$ 의 꼴로 나타내면
$\sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4}$
$\sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^3}$
$\sqrt[6]{30} = \sqrt[12]{30^2}$
그런데
$\frac{6^4}{10^3} = \frac{(2\times 3)^4}{(2\times 5)^3} = \frac{2\times 3^4}{5^3} > 1$,
$\frac{10^3}{30^2} = \frac{10}{9} > 1$ 이므로
$6^4 > 10^3 > 30^2$
따라서 작은 수부터 나열하면
$\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$

23. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, $a + a^{-1}$ 의 값을 구하여라.(단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^2$

$a + a^{-1} + 2 = 16$

$\therefore a + a^{-1} = 14$

24. 양수 $a,\ b,\ c$가 $abc=9,\ a^x=b^y=c^z=81$을 만족시킬 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ 2

해설

$a=81^{\frac{1}{x}},\ b=81^{\frac{1}{y}},\ c=81^{\frac{1}{z}}$

$abc=81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$9=9^{2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$

$1=2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

25. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $a > 0,\ a \neq 1, b > 0, c > 0$)

보기

㉠ $\log_a(b+c) = \log_a b \cdot \log_a c$

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

㉢ $\log_a b^c = (\log_a b)^c$

㉣ $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c}\log_a b$

① ㉠, ㉣　　② ㉡, ㉢　　③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\log_a(b+c) \neq \log_a b \cdot \log_a c$(거짓)

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$(참)

㉢ $\log_a b^c = c\log_a b \neq (\log_a b)^c$(거짓)

㉣ $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c}\log_a b$(참)

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

26. 다음을 간단히 하여라.

$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ (단, $x > 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

$= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

$= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1$

27. 서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여 $\log_a b = \sin x, \log_a c = \cos x$일 때, $b^{\sin x} \cdot c^{\cos x}$의 값은?

① a ② b ③ c ④ ab ⑤ ac

해설

$\log_a b = \sin x$에서 $b = a^{\sin x}$
$\log_a c = \cos x$에서 $c = a^{\cos x}$

$$\begin{aligned} \therefore b^{\sin x} \cdot c^{\cos x} &= (a^{\sin x})^{\sin x} \cdot (a^{\cos x})^{\cos x} \\ &= a^{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= a^1 = a \end{aligned}$$

28. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.141} = \frac{1}{3}\log 0.141 = \frac{1}{3}\log(1.41 \times 10^{-1})$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1)$$
$$= -0.2836 = -1 + 0.7164$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164 이다.

29. $\log_2 x = 4.2$일 때, $\log \dfrac{1}{x}$의 소수 부분은 ? (단, $\log 2 = 0.30$)

① 0.62 ② 0.66 ③ 0.70 ④ 0.74 ⑤ 0.78

해설

$\log_2 x = 4.2$이므로 $\dfrac{\log x}{\log 2} = 4.2, \log x = 1.26$

$\log \dfrac{1}{x} = -\log x = -1.26 = -2 + 0.74$

$\therefore \log \dfrac{1}{x}$의 소수 부분은 0.74

30. $[\log 1] + [\log 2] + [\log 3] + \cdots + [\log 20]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

$1 \le k < 10$ 일 때, $[\log_{10} k] = 0$

$10 \le k < 100$ 일 때, $[\log_{10} k] = 1$

$\therefore 0 \times 9 + 1 \times 11 = 11$

31. 등차수열 $\log 100,\ \log \frac{100}{2},\ \log \frac{100}{4},\ \log \frac{100}{8}, \cdots$ 은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음으로 음수가 되는가?

① 제 11항　② 제 13항　③ 제 15항
④ 제 17항　⑤ 제 19항

해설

주어진 등차수열의 각 항을 정리해서 나열해 보면
$2, 2-\log 2, 2-2\log 2, 2-3\log 2, \cdots$
즉, 이 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 $-\log 2$인 등차수열이므로
첫째항부터 제 n항까지의 합이 음수가 되려면

$$\frac{n\left\{2\cdot 2+(n-1)\cdot(-\log 2)\right\}}{2}<0$$

$$n\left\{(-\log 2)n+(4+\log 2)\right\}<0$$

$$n\left\{(\log 2)n-(4+\log 2)\right\}>0$$

$$n>\frac{4+\log 2}{\log 2}=\frac{4.3010}{0.3010}=14.\times\times\times$$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제15항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

32. 다음 포그슨의 공식에 의하면 2등성인 별의 밝기는 4등성의 밝기의 약 몇 배인가? (단, 별의 각 등급 간의 밝기의 비는 일정하고, $100^{\frac{2}{5}} \fallingdotseq 2.5^2$ 이다.)

> 기원전 그리스의 히파르코스(Hipparchos, 190? ~ 125?B.C)는 눈에 보이는 별들을 밝기에 따라 가장 밝은 별(1등성)에서 가장 어두운 별 6등성)까지 6등급으로 분류하였다. 그 후 1등성의 밝기는 6등성의 밝기의 약100배임을 알게 되었다. 1856년에도 유도된 포그슨의 공식(Pogson' formula)에 의하면 별의 등급(m)과 별의 밝기 (L)사이의 관계는 다음과 같다.
> $m = -\frac{5}{2}\log L + C$($C$는 상수)

① 2.5　② 5　③ 6.25　④ 7.5　⑤ 8

해설

2등성 별의 밝기를 L_2, 4등성 별의 밝기를 L_4라고 하면

$2 = -\frac{5}{2}\log L_2 + C \cdots\cdots$ ㉠

$4 = -\frac{5}{2}\log L_4 + C \cdots\cdots$ ㉡

㉠ - ㉡에서 $\frac{4}{5} = \log \frac{L_2}{L_4}$

$\therefore \frac{L_2}{L_4} = 10^{\frac{4}{5}} = 100^{\frac{2}{5}} \fallingdotseq 2.5^2 = 6.25$

33. 정부에서는 흡연률과 간접흡연의 피해를 줄이고 청소년 흡연예방 등을 위해 담배 가격을 지속적으로 인상하려고 한다. 만약 정부가 담배 가격을 매년 일정한 시기에 바로 이전 연도 보다 15% 씩 올리기로 한다면, 현재 가격의 세 배 이상이 되는 것은 최소 n년이 경과해야 하는지를 아래 상용로그표를 이용하여 구하면? (단, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 이다.)

< 상용로그표 >

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

현재 가격을 a라 하고, n년후 처음으로
3배 이상이 된다고 하면 $a(1+0.15)^n \ge 3a$,
$n \log 1.15 \ge \log 3$
$n \ge \dfrac{\log 3}{\log 1.15} = \dfrac{0.4771}{0.0607} = 7.8\times\times\times$
8년 후 처음으로 3배 이상이 된다.