1. 표의 빈칸에 6개의 자연수를 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

3	5	7
6	8	10
9	11	13

$\therefore 5+6+8+10+9+13=51$

2. 직각삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b, c$가 이 순서대로 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 이 직각삼각형의 넓이는?

① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

해설

직각삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 공차가 3인 등차수열을 이루므로

$a=b-3,\ c=b+3$으로 놓을 수 있다.

즉, 세 변의 길이는 $b-3,\ b,\ b+3$이고 빗변의 길이가 $b+3$이므로 피타고라스의 정리를 이용하면

$(b+3)^2=(b-3)^2+b^2$

$b(b-12)=0$

$\therefore b=12(\because b>0)$

이때, $a=b-3=9$

따라서 주어진 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=54$

3. 등차수열 30, x_1, x_2, $x_3, \cdots$, x_n, -10 의 합이 210 이 되도록 공차 d 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

첫째항이 30, 끝항이 -10 이고 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 210 이므로

$$\frac{(n+2)\{30+(-10)\}}{2}=210$$

$n+2=21 \quad \therefore\ n=19$

따라서 끝항은 주어진 수열의 제 21 항이므로

$-10=30+(21-1)d \quad \therefore\ d=-2$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20,\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 68$ 일 때, 첫째항과 공차의 곱은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$$S_4 = \frac{4(2a+3d)}{2} = 20$$

$$S_8 - S_4 = \frac{8(2a+7d)}{2} - 20$$
$$= 68$$

$2a + 3d = 10,\ 2a + 7d = 22$

두 식을 변끼리 빼면

$4d = 12,\quad d = 3$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a \times d = \frac{3}{2}$$

5. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 각각 n^2+kn, $2n^2-2n+1$일 때, $a_{10}=b_{10}$을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

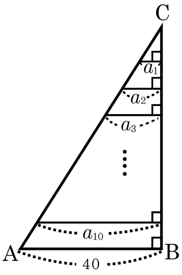
$a_{10}=(10^2+10k)-(9^2+9k)=19+k$

$$\begin{aligned} b_{10} &= (2\cdot 10^2-2\cdot 10+1)-(2\cdot 9^2-2\cdot 9+1) \\ &= 181-145=36 \end{aligned}$$

$a_{10}=b_{10}$에서 $19+k=36$

$\therefore\ k=17$

6. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1+a_{10}=40,\ a_2+a_9=40, \cdots, a_5+a_6=40$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=40\times5=200$

7. 수열 $\{\log_2 a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$a_n = 2^{3n-1}$

$\dfrac{a_{10}}{a_9}$는 공비이므로 8

8. 두 수 A, B에 대하여 $A = 2^{10}$, $B = 5^{10}$일 때, 두 수 A, B의 곱 AB의 양의 약수의 총합을 A와 B의 식으로 나타낸 것은?

① $(2A+1)(5B+1)$
② $(5A-1)(5B-1)$
③ $\frac{1}{4}(2A+1)(5B-1)$
④ $\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$
⑤ $\frac{1}{2}(2A-1)(5B-1)$

해설

$AB = 2^{10} \cdot 5^{10}$

따라서 AB의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+\cdots+5^{10})$

$= \dfrac{2^{11}-1}{2-1} \times \dfrac{5^{11}-1}{5-1}$

$= (2\cdot 2^{10}-1) \times \dfrac{1}{4}(5\cdot 5^{10}-1)$

$= (2A-1) \times \dfrac{1}{4}(5B-1)$

$= \dfrac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$

9. 수열 8, 4, 2, $\frac{1}{2}$, $\cdots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11항 ② 제12항 ③ 제13항
④ 제14항 ⑤ 제15항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n + k$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$S_n = 2 \cdot 3^n + k$에서

$a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 + k = 6 + k$

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k) \\ &= 2 \cdot 3^{n-1}(3-1) \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$ 이 등비수열이 되려면

$\dfrac{a_2}{a_1} = 3$이어야 한다.

즉, $a_2 = 4 \cdot 3^{2-1} = 12$이므로 $\dfrac{12}{6+k} = 3$

$\therefore k = -2$

11. $1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + \cdots + 15 \cdot 1$의 값은?

① 640 ② 660 ③ 680 ④ 700 ⑤ 720

해설

$n \le 15$일 때, $a_n = n(16-n) = -n^2 + 16n$

$\therefore 1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + \cdots + 15 \cdot 1$

$= \sum_{k=1}^{15}(-k^2 + 16k) = -\sum_{k=1}^{15} k^2 + 16\sum_{k=1}^{15} k$

$= -\dfrac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} + 16 \cdot \dfrac{15 \cdot 16}{2} = 680$

12. 수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k(k+1)(k+2)}$ 의 값은?

① $\dfrac{n(n-3)}{(n+1)(n+2)}$　　② $\dfrac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$

③ $\dfrac{n(n+6)}{3(n+1)(n+2)}$　　④ $\dfrac{2n(n+3)}{(n+1)(n+3)}$

⑤ $\dfrac{n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}$

해설

$\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ 이므로

(준식)$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

13. 수열 $\{a_n\}$이 1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n = \alpha^n$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$이다. 이때, 실수 α, β, γ의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\}$: 1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$

$$\begin{array}{cccccc} \vee & \vee & \vee & \vee & & \\ 2 & 4 & 8 & 16 & \cdots \to & b_n = 2^n \end{array}$$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$= 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

$\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$

14. 오른쪽 그림처럼 바둑판 모양의 칸에 1부터 시계 방향으로 차례로 자연수를 배열하였다. 이때, 1 아래로 생기는 수열 1, 4, 15, 34, $\cdots$ 에서 제 10항의 일의 자리 수는?

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
$\cdots$	$\cdots$	34	33	32	31

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

수열 1, 4, 15, 34, 61, $\cdots$

1, 4, 15, 34, 61, $\cdots$, a_{10}

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$

3, 11, 19, 61, $\cdots$, b_9

이므로 $b_k = 3 + (k-1)8 = 8k - 5$

$\therefore a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9}(8k-5) = 1 + 8 \cdot \dfrac{9 \cdot 10}{2} - 5 \cdot 9 = 316$

따라서, 일의 자리 수는 6이다.

15. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots ㉠$

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots ㉡$

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

16. 수열 $1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 9,\ \cdots$ 에서 13은 제 a항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제b항이라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면

$(1), (3,\ 3), (5,\ 5,\ 5), (7,\ 7,\ 7,\ 7), (9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9), \cdots$

이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.

6군까지의 항수가 $1+2+3+4+5+6=21$ 이므로 제 7군의 첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.

따라서 $a+b=22+28=50$

17. 수열 $\{a_n\}$이 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$를 만족시킨다.
$a_1 = 3,\ a_5 = 25$일 때, a_{33}의 값은?

① 175　② 176　③ 177　④ 178　⑤ 179

해설

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1 = 3$이므로 $a_5 = 3 + 4d = 25 \quad \therefore d = \dfrac{11}{2}$

$\therefore a_{33} = 3 + 32 \times \dfrac{11}{2} = 3 + 176 = 179$

18. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$$a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

① $4\left(\frac{3}{2}\right)^8$ ② $4\left(\frac{3}{2}\right)^9$ ③ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

④ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$ ⑤ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1 = 4$이고 공비 r은 $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$이므로

$$a_n = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^9$$

19. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$에서 n대신에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2^1 a_1$

$a_3 = 2^2 a_2$

$a_4 = 2^3 a_3$

$\vdots$

$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$

$\therefore\ a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$a_{10} = 2^{50}$이므로 $2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$

$a_1 = 2^5 = 32$

20. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$ 이 성립함을

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{\text{(가)}}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\text{(가)}}$$

$$=\boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$를 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$=\boxed{\frac{k+1}{2k+3}}$$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

21. $\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}} \cdot \sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$ 의 값은?

① 20 ② $\sqrt{401}$ ③ $\sqrt{402}$ ④ $\sqrt[4]{401}$ ⑤ $\sqrt[4]{402}$

해설

$$\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}} \cdot \sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$$
$$= \sqrt[4]{(\sqrt{401}+1)^2} \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{401}-1)^2}$$
$$= \sqrt{\sqrt{401}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{401}-1} = \sqrt{401-1} = 20$$

22. $(7^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$의 값은?

① 2　　② 6　　③ 10　　④ 14　　⑤ 18

해설

$(7^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$

$\left\{(7^{\frac{1}{4}})^2-(5^{\frac{1}{4}})^2\right\}(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$

$=(7^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})=(7^{\frac{1}{2}})^2-(5^{\frac{1}{2}})^2$

$=7-5=2$

23. $\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$일 때, $\dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$의 값은?(단, $a > 0$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{5}{4}$ ④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}$

해설

$\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$에서 $a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x})$이므로

$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore \ a^{2x} = 3$

$$\therefore \ \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \dfrac{1}{3}}{3 - \dfrac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

24. $9^x = 2$일 때, $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-4x}$의 값은?

① $\dfrac{1}{64}$ ② $\dfrac{1}{16}$ ③ 16 ④ 64 ⑤ 256

해설

$9^x = 2$이므로 $3^{2x} = 2$이다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= (3^{-3})^{-4x} = 3^{12x} \\ &= (3^{2x})^6 = 2^6 = 64\end{aligned}$$

25. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x의 범위는?

① $-1 < x < 3$　② $0 > x$　③ $2 < x < 5$

④ $3 < x < 4$　⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x-3>0, x-3 \neq 1$

따라서 $x>3, x \neq 4 \cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+6x-8>0$

$x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-4)<0$

따라서 $2<x<4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면 $3<x<4$

26. $\log_{10}(1+1)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준식)$= \log_{10} 2 + \log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \cdots + \log_{10} \frac{100}{99}$

$= \log_{10}\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99}\right)$

$= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2$

27. $\log_2 12 = a$일 때, $\log_3 6$을 a로 나타내면?

① $\dfrac{a-1}{a-2}$ ② $\dfrac{a}{a-2}$ ③ $\dfrac{a}{a-1}$ ④ $\dfrac{a+1}{a-1}$ ⑤ $\dfrac{a+2}{a}$

해설

$\log_2 12 = \log_2(2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$

즉, $2 + \log_2 3 = a$이므로 $\log_2 3 = a - 2$

$$\therefore \ \log_3 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 3} = \frac{\log_2(2 \times 3)}{\log_2 3}$$

$$= \frac{1 + \log_2 3}{\log_2 3} = \frac{1 + (a-2)}{a-2} = \frac{a-1}{a-2}$$

28. 등식 $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$이 성립할 때, $x+y+z$의 값은?

① 58 ② 64 ③ 75 ④ 89 ⑤ 93

해설

$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$에서 $\log_3(\log_4 x) = 1$

$\log_4 x = 3 \quad \therefore x = 4^3 = 64$

$\log_3(\log_4(\log_2 y)) = 0$에서 $\log_4(\log_2 y) = 1$

$\log_2 y = 4 \quad \therefore y = 2^4 = 16$

$\log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$에서 $\log_2(\log_3 z) = 1$

$\log_3 z = 2 \quad \therefore z = 3^2 = 9$

$\therefore x+y+z = 64+16+9 = 89$

29. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.138} = \frac{1}{3}\log 0.138 = \frac{1}{3}\log(1.38 \times 10^{-1})$$ 따 라 서

$$= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1)$$
$$= -0.2867 = -1 + 0.7133$$

$\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분은 0.7133 이다.

30. 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2일 때, 등식 $\log \frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$을 만족하는 자연수 n의 개수는?

① 56 ② 57 ③ 58 ④ 59 ⑤ 60

해설

$\log \frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$에서

$\log A - \log 2 = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$

$\log A = \log 2 + 2\log 2\sqrt{2} + \log n = \log 2 + \log 8 + \log n = \log 16n$

$A = 16n$

그런데, 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2이므로

$2 \le \log A < 3, 10^2 \le A < 10^3$

$\therefore 100 \le 16n < 1000$

$6.25 \le n < 62.5$

따라서 자연수 n의 개수는 $62 - 6 = 56$이다.

31. $[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 2014]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2007 ② 3515 ③ 4914 ④ 4935 ⑤ 7826

해설

(i) $1 \le n < 10$일 때, $0 \le \log n < 1$이므로 $[\log n]=0$
(ii) $10 \le n < 100$일 때, $1 \le \log n < 2$이므로 $[\log n]=1$
(iii) $100 \le n < 1000$일 때, $2 \le \log n < 3$이므로 $[\log n]=2$
(iv) $1000 \le n < 10000$일 때, $3 \le \log n < 4$이므로 $[\log n]=3$
(i), (ii), (iii), (iv)에서
$[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 2014]$
$=0\times 9+1\times 90+2\times 900+3\times 1015=4935$

32. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\log(S_n + 1) = n$이 성립한다. 이때, 다음 중 수열 $\{a_n\}$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 첫째항이 1이고, 공차가 10인 등차수열이다.

② 첫째항이 1이고, 공비가 10인 등비수열이다.

③ 첫째항이 9이고, 공차가 30인 등차수열이다.

④ 첫째항이 9이고, 공비가 $\sqrt{10}$인 등비수열이다.

⑤ 첫째항이 9이고, 공비가 10인 등비수열이다.

해설

$\log(S_n + 1) = n$에서 $S_n + 1 = 10^n$이므로 $S_n = 10^n - 1$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 10 - 1 = 9$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1} = (10^n - 1) - (10^{n-1} - 1)$

$= 9 \cdot 10^{n-1}$

이것은 $n = 1$일 때에도 성립하므로 $a_n = 9 \cdot 10^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9이고, 공비가 10인 등비수열이다.

33. 반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이 S와 부피 V는 다음과 같다.

$S = 4\pi r^2,\ V = \frac{4}{3}\pi r^3$

다음 중 r의 값에 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 것은?

① $\log S - \frac{1}{3}\log V$　② $\log S - \frac{2}{3}\log V$　③ $\log S - log V$

④ $\log S - \frac{4}{3}\log V$　⑤ $\log S - \frac{5}{3}\log V$

해설

$\log S = \log 4\pi + 2\log r \cdots$ ㉠

$\log V = \log \frac{4}{3}\pi + 3\log r \cdots$ ㉡

㉠×3−㉡×2에서

$3\log S - 2\log V$

$= 3\log 4\pi - 2\log \frac{4}{3}\pi$

$= 3(\log S - \frac{2}{3}\log V)$(일정)