1. 두 수 $2p+7$과 $2p+9$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p+7$, p^2, $2p+9$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$2p^2 = 4p+16$, $p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0$

따라서 $p=-2$ 또는 $p=4$

이때, p는 양수이므로 $p=4$

2. 두 수 $\frac{45}{4}$, $\frac{99}{4}$ 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 $(n+2)$개의 수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 그 합이 180이다. 이때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

구하는 합을 S_{n+2}라고 하면

$$S_{n+2} = \frac{(n+2)\left(\frac{45}{4} + \frac{99}{4}\right)}{2} = 180$$

$18(n+2) = 180,\ n+2 = 90 \quad \therefore\ n = 8$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

4. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + n + \alpha$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 α의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$S_n = 2n^2 + n + \alpha$에서

(i) $n = 1$일 때 $S_1 = a_1 = 2 + 1 + \alpha = 3 + \alpha$

(ii) $n \geq 2$일 때

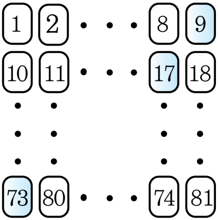
$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n + \alpha - \left\{2(n-1)^2 + (n-1) + \alpha\right\} \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

그런데 첫째항부터 등차수열을 이루려면

$3 + \alpha = 4 \cdot 1 - 1$

$\therefore\ \alpha = 0$

5. 1부터 81까지 쓰여진 카드를 오른쪽 그림과 같이 배열하였다. 이때 오른쪽 대각선 방향(/)으로 배열된 카드에 쓰여진 수들의 합은?



① 367 ② 369 ③ 371

④ 373 ⑤ 375

해설

구하는 수열은 9, 17, 25, $\cdots$, 73으로 공차가 8인 등차수열이다.

따라서, 구하는 합은 $\dfrac{9(9+73)}{2}=369$이다.

6. 부피가 8 이고 겉넓이가 28 인 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이 직육면체의 모서리의 길이의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a,\ ar,\ ar^2$ 이라 하면

(부피)$= a\cdot ar\cdot ar^2 = (ar)^3 = 8$

$\therefore\ ar = 2 \cdots$ ㉠

(겉넓이)$= 2(a\cdot ar + ar\cdot ar^2 + ar^2\cdot a)$

$= 2\left\{a\cdot ar + (ar)^2\cdot r + (ar)^2\right\}$

$= 2(2a + 4r + 2^2)$

$= 4a + 8r + 8 = 28$

$\therefore\ a + 2r = 5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1,\ r = 2$ 또는 $a = 4,\ r = \frac{1}{2}$

따라서 (가로의 길이, 세로의 길이, 높이)가 $(1,\ 2,\ 4)$ 또는 $(4,\ 2,\ 1)$ 이므로 이 직육면체의 모서리의 길이의 합은 $4(1 + 2 + 4) = 28$

7. 8, a, b가 이 순서로 등차수열을 이루고, a, b, 36이 이 순서로 등비수열을 이루도록 하는 양수 a, b의 값을 정할 때, a, b의 최대공약수는?

① 1 ② 3 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

a는 8과 b의 등차중항이므로

$2a = 8 + b \cdots$ ㉠

b는 a와 36의 등비중항이므로

$b^2 = 36a \cdots$ ㉡

㉠에서 $a = \frac{1}{2}(8+b)$ 이므로 ㉡에 대입하면

$b^2 = 18(8+b)$, $b^2 - 18b - 144 = 0$

$(b-24)(b+6) = 0$

$\therefore b = 24$ 또는 $b = -6$

그런데 b는 양수이므로 $b = 24$

$\therefore a = \frac{1}{2}(8+24) = 16$

16과 24의 최대공약수는 8이다.

8. 첫째항부터 제3항까지의 합이 28, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 252인 실수로 이루어진 등비수열의 제10항은?

① 2^7 ② 2^8 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{11}

해설

첫째항을 a, 공비를 $r(r \neq 1)$라 하고, 이 등비수열의 일반항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 28 \cdots\cdots ㉠$$

$$S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = 252 \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 변형하면

$$\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 252,$$

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1} \cdot (r^3+1) = 252$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$28(r^3+1) = 252,\ r^3+1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$

r는 실수이므로 $r = 2 \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $7a = 28 \quad \therefore a = 4$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 4, 공비는 2이다.

$\therefore a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2^{11}$

9. 100만원을 월이율 2%, 1개월마다의 복리로 빌릴 때, 1년 후에는 얼마를 갚아야 하는가?(단, $1.02^{12} = 1.2682$)

① 1258200원 ② 1268200원 ③ 1278200원

④ 1288200원 ⑤ 1298200원

해설

$$S = 1000000(1+0.02)^{12} = 10^6 \times 1.02^{12}$$
$$= 10^6 \times 1.2682 = 1268200(\text{원})$$

10. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① 0 ② −1 ③ −2 ④ −3 ⑤ −4

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = (3 \cdot 2^1 + k)$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2-1) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdots$ ㉠

따라서, $n \geq 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면 ㉠이 $n = 1$일 때에도 성립해야 하므로

$3 = 6 + k \quad \therefore\ k = -3$

11. 수열 $1 \cdot 2 \cdot 4,\ 2 \cdot 4 \cdot 8,\ 3 \cdot 6 \cdot 12,\ 4 \cdot 8 \cdot 16, \cdots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400 ② 1100 ③ 12100

④ 24200 ⑤ 48400

해설

$a_k = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^2 \cdot 11^2 = 24200$

12. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S라 할 때, $\frac{S}{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 132

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로
1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S라 하면
$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$

$$2S = \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 2640$$

$\therefore S = 1320$

$$\therefore \frac{S}{10} = 132$$

13. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{f(2x+1)}$ 의 값은?

① 8　② $\sqrt{99} - 1$　③ 9

④ $\sqrt{99} + 1$　⑤ 10

해설

$f(2x+1) = \sqrt{2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-1}}$

$= \sqrt{2x+1+\sqrt{4x^2+4x}}$

$= \sqrt{(x+1)+x+2\sqrt{(x+1)\cdot x}}$

$= \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

$\frac{1}{f(2x+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{100} - \sqrt{99}$

$= \sqrt{100} - 1$

$= 10 - 1 = 9$

14. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$ 의 값은?

① $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

② $\frac{n(3n+5)}{4(2n+1)(n+2)}$

③ $\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$

④ $\frac{n(3n+4)}{4(n+1)(n+2)}$

⑤ $\frac{n(3n+4)}{2(n+1)(n+2)}$

해설

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right\}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

15. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 일 때, $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 30

해설

$$30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$$
$$= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29})$$
$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30$$

16. 오른쪽 그림과 같이 연속한 자연수 1, 2, 3, $\cdots$ 을 나열할 때, 위에서 5 번째 행의 왼쪽에서 11 번째 열의 수는?

1	4	9	16	$\cdots$
2	3	8	15	
5	6	7	14	
10	11	12	13	
$\vdots$				$\ddots$

① 113 ② 114 ③ 116 ④ 117 ⑤ 119

해설

수열로 표시하면

$(1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9), \cdots$

로 묶을 수 있으며 제 n군의 끝항은

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 이므로 위에서 5 번째 행, 왼쪽에서 11 번째 열의 수는 제 11군의 끝항에서 5 번째에 있는 수이다.

$\therefore 11^2-4=117$

17. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$a_{n+1} - a_n = 2^n$이므로 $b_n = 2^n$

따라서 $n \geq 2$일 때,

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$ 이때, $a_1 = 1$은 ㉠을 만

$= 2^n - 1 \cdots\cdots$ ㉠

족시키므로 구하는 일반항은 $a_n = 2^n - 1$

$\therefore a_9 = 2^9 - 1 = 511$

18. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족할 때, 일반항 a_n을 구하면?

① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$

이때, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이고,

$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$이므로

$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$

$$= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$$

19. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1}(n \geq 2)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 2014항은?

① 5　② 3　③ -2　④ -3　⑤ -5

해설

$a_1 = 3$

$a_2 = 5$

$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$

$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$

$a_5 = a_4 - a_3 = -3 - 2 = -5$

$a_6 = a_5 - a_4 = -5 - (-3) = -2$

$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-5) = 3$

$a_8 = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $3,\ 5,\ 2,\ -3,\ -5,\ -2$가 계속해서 반복된다.

이 때, $2014 = 6 \times 335 + 4$이므로

$a_{2014} = a_4 = -3$

20. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot 1=3$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
$3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$ ①이다.
①의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 [㉠] 일 때에도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$ ② $n=-k+2$ ③ $n=k+1$
④ $n=k+2$ ⑤ $n=2k+1$

해설

㉠의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$
$=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

21. $a = 2^{12}$ 일 때, $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{24}} = a^{\frac{1}{12}}$

$a = 2^{12}$ 이므로

$a^{\frac{1}{12}} = (2^{12})^{\frac{1}{12}} = 2$

22. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$x^3 + x^{-3}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$

$x - 2 + x^{-1} = 4$

$x + x^{-1} = 6$

$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$

$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$

23. $p \times 3^x = 1,\ q \times 3^y = 1$일 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}$을 $p,\ q$로 바르게 나타낸 것은?

① $2pq$ ② $8pq$ ③ p^2q ④ p^4q^2 ⑤ $\frac{q}{p^2}$

해설

$3^x > 0,\ 3^y > 0$이므로 $p > 0,\ q > 0$이다.

$3^x = \frac{1}{p},\ 3^y = \frac{1}{q}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y} = (3^{-2})^{2x+y} = 3^{-4x-2y}$

$= (3^x)^{-4}(3^y)^{-2} = \left(\frac{1}{p}\right)^{-4}\left(\frac{1}{q}\right)^{-2} = p^4q^2$

24. 세 자연수 $a,\ b,\ c$ 의 최대공약수가 3 이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$ 이므로
$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$
따라서, $a = 4c,\ b = 2c$
$a,\ b,\ c$ 의 최대공약수가 3 이므로
$c = 3,\ a = 12,\ b = 6$
$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$

25. $a>0,\ a\neq 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\log_a a=1$

② $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

③ $\log_a(x-y)=\frac{\log_a x}{\log_a y}$

④ $\log_a x^y=y\log_a x$

⑤ $\log_a 5\cdot\log_5 a=1$

해설

③ $\log_a(x-y)\neq\frac{\log_a x}{\log_a y}$

⑤ $\log_a 5\cdot\log_5 a=\log_a 5\cdot\frac{1}{\log_a 5}=1$

26. $\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$ 의 소수부분을 x라 할 때, 2^{x+1} 의 값을 구하면?

① $\sqrt{3}+1$ ② $\sqrt{5}+1$ ③ $\sqrt{6}+1$

④ $\sqrt{7}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

해설

$\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$

$= \log_2 \sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$= \log_2(\sqrt{6}+1)$

$= \log_2(3.\times\times\times)$

$= 1.\times\times\times$

따라서, $x = \log_2(\sqrt{6}+1) - 1$

$2^{x+1} = 2^{\log_2(\sqrt{6}+1)} = \sqrt{6}+1$

27. 실수 a, b가 $(201.4)^a = (0.02014)^b = 10000$을 만족할 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$$\log_{201.4} 10^4 = a$$

$$4\log_{201.4} 10 = a$$

$$\log_{0.02014} 10000 = b$$

$$4\log_{0.02014} 10 = b$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{4}\log_{10} 201.4 - \frac{1}{4}\log_{10} 0.02014$$

$$= \frac{1}{4}(\log 2.014 + 2 - \log 2.014 + 2)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

28. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.123}$의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.6966

해설

상용로그표에서 $\log 1.23 = 0.0899$이므로

$$\log \sqrt[3]{0.123} = \frac{1}{3}\log 0.123 = \frac{1}{3}\log 1.23 \times 10^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.23 - 1) = \frac{1}{3}(0.0899 - 1)$$
$$= -0.3034 = -1 + 0.6966$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.123}$의 소수 부분은 0.6966이다.

29. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 일 때, 3^4 는 몇 자리 정수인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\log 3^4 = 4 \log 3$
$= 4 \times 0.4771 = 1.9084$
따라서 $\log 3^4$ 의 지표는 1이므로 3^4 은 2자리 정수이다.

30. $\log x$의 정수 부분은 3이고, $\log x$, $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. $\log \sqrt{x}$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라 할 때 $n+8\alpha$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\log x = 3+\beta \ (0 \le \beta < 1)$

$\log \sqrt[3]{x} = \dfrac{1}{3}\log x = 1 + \dfrac{\beta}{3}$

$\therefore \ \beta + \dfrac{\beta}{3} = 1$

$\therefore \ \beta = \dfrac{3}{4}$

$\log \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}(3+\alpha) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4}$

$n = 2, \ \alpha = \dfrac{1}{4}$

$n + 8\alpha = 2 + 2 = 4$

31. $\log_{10} N$의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$의 두 근일 때, 상수 k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$\log_{10} N$의 정수 부분과 소수 부분을 m, α $(0 \le \alpha < 1)$라 하면 m, α가 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계로부터 $m + \alpha = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$이다.

따라서, $m = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$

한편, 두 근의 곱 $m\alpha = \frac{k}{2} = 1$이므로 $k = 2$

32. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $12x$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$로 치환하면, $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5(\because t > 0)$

$$\therefore\ 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1-0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 값은 $12x = 28$

33. 어떤 방사능 물질이 일정한 비율로 붕괴되어 x년 후에는 방사능이 $y = y_0 a^{-x}$이 남는다고 한다. 2년 후의 방사능이 초기의 방사능의 $\frac{1}{2}$이 되었다고 할 때, 8년 후의 y의 값을 구하면? (단, y_0는 상수, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}y_0$ ② $\frac{1}{8}y_0$ ③ $\frac{1}{16}y_0$ ④ $\frac{1}{32}y_0$ ⑤ $\frac{1}{64}y_0$

해설

x년 후 방사능의 양 $y = y_0 a^{-x}$이므로

초기 방사능의 양$= y_0 a^{-0} = y_0$

2년 후 방사능의 양$= y_0 a^{-2}$

$y_0 \cdot a^{-2} = \frac{1}{2} y_0$

즉 $a^{-2} = \frac{1}{2}$

8년 후 방사능의 양

$y = y_0 a^{-8} = y_0 (a^{-2})^4$

$= y_0 (\frac{1}{2})^4$

$= \frac{1}{16} y_0$