1. $a > b,\ x > y$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a+b)(x+y) > 2(ax+by)$

② $(a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

③ $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$

④ $(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$

⑤ $(a+b)(x+y) = 2(ax+by)$

해설

$(a+b)(x+y) - 2(ax+by)$
$= ay + bx - ax - by$
$= a(y-x) - b(y-x)$
$= (a-b)(y-x)$

그런데 $a-b>0,\ y-x<0$

$\therefore (a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

2. 양수 $a,\ b$가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$ ② $P \geq Q$ ③ $P=Q$

④ $P<Q$ ⑤ $P \leq Q$

해설

$a,\ b$는 양수이고 $a+b=1$이므로

$0<a<1,\ 0<b<1$

또 $b=1-a$이므로

$$P=a^3+b^3=a^3+(1-a)^3$$
$$=a^3+1-3a+3a^2-a^3$$
$$=3a^2-3a+1$$
$$Q=a^2+b^2=a^2+(1-a)^2$$
$$=a^2+a^2-2a+1$$
$$=2a^2-2a+1$$
$$P-Q=3a^2-3a+1-2a^2+2a-1$$
$$=a^2-a=a(a-1)$$

그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$

$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

3. $0 < a < b,\ a+b=1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$　　② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$　　④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$

$= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$

$= (a+b) - b + a$

$= 2a > 0$

$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$

$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$

$= 2\sqrt{ab} - 2a$

$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$

$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

4. $0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$인 실수 $x,\ y,\ z$가 $x + y + z = 2$를 만족시킬 때, $k = xy + yz + zx$가 가질 수 있는 값의 범위는?

① $1 < k \leq \frac{4}{3}$ ② $1 \leq k < \frac{4}{3}$ ③ $0 < k < 2$

④ $0 < k \leq 2$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$x < 1,\ y < 1$에서 $1 - x > 0,\ 1 - y > 0$이므로 $(1 - x)(1 - y) > 0$
양변에 $x + y - 1$을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면
$xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1$
마찬가지방법으로 $yz,\ zx$를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1 \\ yz = (1 - y)(1 - z) - (1 - y - z) > y + z - 1 \\ zx = (1 - z)(1 - x) - (1 - z - x) > z + x - 1 \end{cases} \quad \text{에서}$$

$xy + yz + zx > 2(x + y + z) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$
또, $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$에서 ($\because\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0$ 에서 양 변에 $3(xy + yz + zx)$를 더한다)
$4 \geq 3(xy + yz + zx)$

$\therefore\ 1 < xy + yz + zx \leq \frac{4}{3}$