

1. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

- ① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

2. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

- ① $ab \leq 0$
- ② $ab \geq 0$
- ③ $a + b \geq 0$
- ④ $ab < 0$
- ⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여
 $(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$
 $= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면
 a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $ab < 0$

3. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

- ① $|a| \geq a$
② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$
③ $|a|^2 = a^2$
④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$
⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \quad (\text{③이 쓰임}) \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \quad (\text{①이 쓰임}) \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \quad (\text{④가 쓰임}) \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \quad (\text{⑤가 쓰임}) \end{aligned}$$

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

4. 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $A = \frac{x+y}{2}, G = \sqrt{xy}, H = \frac{2xy}{x+y}$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $G \geq A \geq H$
- ② $A \geq H \geq G$
- ③ $A \geq G \geq H$
- ④ $H \geq G \geq A$
- ⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$
 $\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$
 $\therefore A \geq G \cdots \textcircled{1}$
 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$
 $\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$
 $\therefore G \geq H \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $A \geq G \geq H$

5. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

6. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 이고 $x^2 + y^2 = 2$ 이 성립할 때, $ax + by$ 의 최댓값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에 주어진 값

$a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 2$ 을 대입하면

$1 \times 2 \geq (ax + by)^2$ 이다.

따라서 $-\sqrt{2} \leq ax + by \leq \sqrt{2}$

$\therefore ax + by$ 의 최댓값은

$\sqrt{2}$ 이다.

7. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

8. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}ab,$ A(3, 2)

는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 위의 점이므로

$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$

양변을 제곱하면 $1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$

따라서 $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

9. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x 분씩 늘어나며 y 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
 y 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$ 분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \textcircled{A}$$

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

따라서 xy 의 최댓값은 45이다.

10. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y$ 의 최솟값을 구하면?

① -8

② -7

③ -6

④ -5

⑤ -4

해설

$2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y \geq k$ 로 놓고,

x 에 관해 내림차순으로 정리하면

$2x^2 - 4(1+y)x + 5y^2 - 2y - k \geq 0$

위의 식이 항상 성립하여야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4(1+y)^2 - 2(5y^2 - 2y - k) \leq 0$$

$$\therefore 3y^2 - 6y - k - 2 \geq 0$$

위의 식이 항상 성립하여야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9 + 3(k+2) \leq 0 \quad \therefore k \leq -5$$

따라서, 구하는 $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y$ 의 최솟값은 k 의 최댓값 -5 이다.