1. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$　② $A \leq B$　③ $A > B$

④ $A \geq B$　⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

2. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$ ② $ab \geq 0$ ③ $a+b \geq 0$

④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

3. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a|+|b| \geq |a+b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$
$=\ a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$
$=\ 2(|ab|-ab)\ 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$
$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2=a^2$

④ $a-b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$ (③이 쓰임)
$=a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$
$=2(|ab|-ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

4. 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $A = \dfrac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$, $H = \dfrac{2xy}{x+y}$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$ ② $A \geq H \geq G$ ③ $A \geq G \geq H$

④ $H \geq G \geq A$ ⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$\therefore A \geq G \cdots$ ㉠

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \dfrac{2xy}{x+y}$

$\therefore G \geq H \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $A \geq G \geq H$

5. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때, $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore\ \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

6. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$이고 $x^2 + y^2 = 2$이 성립할 때, $ax + by$의 최댓값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$에 주어진 값

$a^2 + b^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 2$을 대입하면

$1 \times 2 \geq (ax + by)^2$이다.

따라서 $-\sqrt{2} \leq ax + by \leq \sqrt{2}$

$\therefore ax + by$의 최댓값은

$\sqrt{2}$이다.

7. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \ M=10, \ m=-10$

$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$

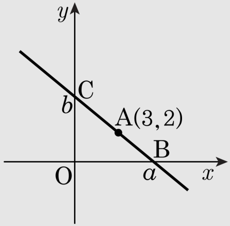
8. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle$OBC 의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}ab$, A$(3,2)$ 는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로



$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\geq\frac{12}{S}$　　$\therefore S\geq 12$

따라서 $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

9. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x분씩 늘어나며 y명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
y명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로
$10x + 2y \leq 60 \cdots$ ㉠
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$
$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\sqrt{20xy} \leq 60,\ 20xy \leq 900$
$\therefore xy \leq 45$
따라서 xy의 최댓값은 45이다.

10. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y$ 의 최솟값을 구하면?

① -8　② -7　③ -6　④ -5　⑤ -4

해설

$2x^2+5y^2-4xy-4x-2y \geq k$ 로 놓고,
x에 관해 내림차순으로 정리하면
$2x^2-4(1+y)x+5y^2-2y-k \geq 0$
위의 식이 항상 성립하여야 하므로

$$\frac{D}{4}=4(1+y)^2-2(5y^2-2y-k) \leq 0$$

$\therefore 3y^2-6y-k-2 \geq 0$
위의 식이 항상 성립하여야 하므로

$$\frac{D}{4}=9+3(k+2) \leq 0 \quad \therefore k \leq -5$$

따라서, 구하는 $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y$ 의 최솟값은 k 의 최댓값 -5 이다.