1. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식$|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab)\ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

2. 양수 $a,\ b$가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$　② $P \geq Q$　③ $P=Q$
④ $P<Q$　⑤ $P \leq Q$

해설

$a,\ b$는 양수이고 $a+b=1$이므로
$0<a<1,\ 0<b<1$
또 $b=1-a$이므로
$P=a^3+b^3=a^3+(1-a)^3$
$=a^3+1-3a+3a^2-a^3$
$=3a^2-3a+1$
$Q=a^2+b^2=a^2+(1-a)^2$
$=a^2+a^2-2a+1$
$=2a^2-2a+1$
$P-Q=3a^2-3a+1-2a^2+2a-1$
$=a^2-a=a(a-1)$
그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$
$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

3. $0 < a < b,\ a + b = 1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$
② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$
④ $\sqrt{b-a} < 1$
⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
$= 2\sqrt{ab} > 0$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$
$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
$= (a+b) - b + a$
$= 2a > 0$
$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$
$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
$= 2\sqrt{ab} - 2a$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$
$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

4. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + 5b \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 a, b에서 $a + b$의 최솟값을 구하면?

① 5　② 15　③ 25　④ 35　⑤ 45

해설

$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + 5b \geq 0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$\dfrac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + 5b) \leq 0$

정리하면 $(20 - a)y + 25 - 5b \leq 0 \cdots$ ㉠

㉠이 임의의 실수 y 에 대하여 성립하므로

$20 - a = 0,\ 5b - 25 \geq 0$

$\therefore\ a = 20,\ b \geq 5$

$\therefore\ a + b \geq 25$