**1.** $a, b$ 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a+b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a+b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a+b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab)\ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a+b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a+b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$ , $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$ , $b \geq 0$ , $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a| + |b|)^2 - (|a+b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a+b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a+b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \geq |a+b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

**2.** 양수 $a$, $b$가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$ ② $P \geq Q$ ③ $P=Q$

④ $P<Q$ ⑤ $P \leq Q$

해설

$a$, $b$는 양수이고 $a+b=1$이므로

$0<a<1$, $0<b<1$

또 $b=1-a$이므로

$$
\begin{aligned}
P &= a^3+b^3 = a^3+(1-a)^3 \\
&= a^3+1-3a+3a^2-a^3 \\
&= 3a^2-3a+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q &= a^2+b^2 = a^2+(1-a)^2 \\
&= a^2+a^2-2a+1 \\
&= 2a^2-2a+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P-Q &= 3a^2-3a+1-2a^2+2a-1 \\
&= a^2-a = a(a-1)
\end{aligned}
$$

그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$

$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

**3.** $0 < a < b,\ a + b = 1$ 일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

| |
|---|
| $1, \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}, \quad \sqrt{b}-\sqrt{a}, \quad \sqrt{b-a}$ |

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$
② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$
④ $\sqrt{b-a} < 1$
⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

**해설**

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

( i ) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$

$= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

( ii ) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$

$= (a+b) - b + a$

$= 2a > 0$

$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$

$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$

$= 2\sqrt{ab} - 2a$

$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$

$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

( i ), ( ii ), (iii) 에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

**4.** 임의의 실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b\geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 $a$, $b$에서 $a+b$의 최솟값을 구하면?

① 5 ② 15 ③ 25 ④ 35 ⑤ 45

해설

$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+5b\geq 0$이 임의의 실수 $x$에 대하여 성립하므로

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+5b)\leq 0$

정리하면 $(20-a)y+25-5b\leq 0\cdots$ ㉠

㉠이 임의의 실수 $y$ 에 대하여 성립하므로

$20-a=0,\ 5b-25\geq 0$

$\therefore\ a=20,\ b\geq 5$

$\therefore\ a+b\geq 25$