

1. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

2. x 에 대한 이차식 $2x^2 + (k+1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이 될 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 + (k+1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이므로

$$D = (k+1)^2 - 8(k-1) = 0$$

$$(k-3)^2 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

3. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

4. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0 \cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0 \cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a \neq 0, a \neq 1$ 일 때, $x = \frac{a-1}{a(a-1)} = \frac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a 의 값은 0이다.

5. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ 를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, $a - 2b + c$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = -1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = 3$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$-1 + 2 + 3 = 4 \quad \therefore a = -4$

$(-1) \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 3 = -2 + 6 - 3 = 1 \quad \therefore b = 1$

세 근의 곱 $(-1) \times 2 \times 3 = -6 \quad \therefore c = 6$

$\therefore a - 2b + c = -4 - 2 + 6 = 0$

6. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5, 5\alpha = 5$$

$$\alpha = 1$$

$$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$$

$$a = -3$$

$$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$$

$$\therefore a + b = 4$$

7. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근 α, β 가 $-1 < \alpha < 0, 1 < \beta < 2$ 일 때 다음 중 옳은 것을 모두 고르면 ? (단, $a < 0$)

㉠ $c < 0$	㉡ $ab < 0$
㉢ $a - b + c < 0$	㉣ $a + 2b + 4c > 0$

- ① ㉠ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣
 ④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉣

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 로 놓으면
 $-1 < \alpha < 0, 1 < \beta < 2$ 에서

㉠) $f(0) = c > 0$

㉡) 꼭짓점의 x 좌표가 양이므로 $-\frac{b}{2a} > 0 \therefore ab < 0$

㉢) $f(-1) = a - b + c < 0$

㉣) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c > 0, \frac{1}{4}(a + 2b + 4c) > 0$
 $\therefore a + 2b + 4c > 0$

8. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$x^2 - 2x - y = 0 \text{ 에서 } y = x^2 - 2x$$

이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면

$$3x^2 - 2(x^2 - 2x) = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

9. $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수라고 할 때, $y = 2[x] + 3$, $y = 3[x - 2] + 5$ 를 동시에 만족시키는 정수가 아닌 x 에 대하여 $x + y$ 의 범위를 구하면?

① $13 < x + y < 14$

② $14 < x + y < 15$

③ $-4 < x + y < 4$

④ $15 < x + y < 16$

⑤ $x + y = 16.4$

해설

$$2[x] + 3 = 3[x - 2] + 5, \quad 2[x] + 3 = 3([x] - 2) + 5$$

$$\therefore [x] = 4$$

x 가 정수가 아니므로 $4 < x < 5$

$$y = 2[x] + 3 = 11 \text{ 이므로 } 15 < x + y < 16$$

10. 다음 조건을 만족시키는 z_1, z_2, z_3 에 대하여 이것을 근으로 갖는 삼차방정식을 구하면? (단, $z_i(i = 1, 2, 3)$ 는 복소수, $z = \alpha + \beta i$ 일 때, $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$)

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, z_1 + z_2 + z_3 = 1, z_1 z_2 z_3 = 1$

- ①

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
- ②

$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
- ③

$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$
- ④

$x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$
- ⑤

$2x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$

해설

$z_1 = \alpha + \beta i$ 라고 하면 $\bar{z}_1 = \alpha - \beta i$

$z_1 \bar{z}_1 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$
 $= \alpha^2 + \beta^2 = |z_1|^2 = 1$

마찬가지로 풀면 $z_2 \bar{z}_2 = 1, z_3 \bar{z}_3 = 1$ 이므로

$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$
 $= \bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
 $= \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1$
($\because z_1 z_2 z_3 = 1$)

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

z_1, z_2, z_3 를 근으로 갖는 방정식은

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$