

1. 수열 1, -2, 3, -4, 5, ... 의 11번째 항은?

- ① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11번째 항은 11이다.

2. 두 수 48과 2 사이에 10개의 수 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 을 넣어 12개의 수 48, $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2$ 가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제 12항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2} = 300$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 300 - (48 + 2) = 300 - 50 = 250$$

3. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \therefore (가) = \frac{3}{2}$

4. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $n \geq 3$ 일 때, $S_n = 94$ 를 만족하는 d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$S_n = 94 \text{에서 } \frac{n\{2 + (n-1)d\}}{2} = 94$$

$$n\{2 + (n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 n 의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188이다.

$$n = 4 \text{일때, } 2 + (4-1)d = 47 \quad \therefore d = 15$$

$$n = 47 \text{일때, } 2 + (47-1)d = 4 \quad \therefore d = \frac{2}{23}$$

$$n = 94 \text{일때, } 2 + (94-1)d = 2 \quad \therefore d = 0$$

$$n = 188 \text{일때, } 2 + (188-1)d = 1 \quad \therefore d = -\frac{1}{187}$$

이 중에서 d 가 자연수가 되는 것은 $n = 4$ 이므로 $d = 15$

5. 세 수 $x-4$, x , $x+8$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x 가 $x-4$, x , $x+8$ 의 등비중항이므로
 $x^2 = (x-4)(x+8)$, $x^2 = x^2 + 4x - 32$
 $4x = 32 \therefore x = 8$

6. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{ (\omega^2)^{36} - 1 \}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

7. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k)$ 의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

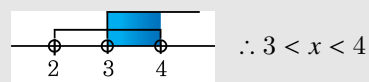
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = \sum_{k=1}^5 \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^5 2^k \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67\end{aligned}$$

8. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 이 정의되기 위한 실수 x 의 값의 범위를 구하면?

- ① $3 < x < 4$ ② $5 < x < 7$ ③ $-1 < x < 3$
④ $x > 0$ ⑤ $2 < x < 5$

해설

$x-3 \neq 1, x-3 > 0,$
 $-x^2+6x-8 > 0$ 이므로
 $x \neq 4, x > 3$
 $x^2-6x+8 < 0$
 $2 < x < 4$



9. 수열 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

10. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$ 의 값은?

- ①

$\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$
- ②

$\frac{n(3n+5)}{4(2n+1)(n+2)}$
- ③

$\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$
- ④

$\frac{n(3n+4)}{4(n+1)(n+2)}$
- ⑤

$\frac{n(3n+4)}{2(n+1)(n+2)}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right\} \\ &+ \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

11. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{11}{10}$ ③ $\frac{10}{11}$ ④ $\frac{20}{11}$ ⑤ $\frac{11}{20}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2+\cdots+n} &= \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)} &= 2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{20}{11} \end{aligned}$$

12. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때,
 $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned} & 30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29}) \\ &= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29}) \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30 \end{aligned}$$

13. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(1, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 3, 4)...

- ① 200
- ② 210
- ③ 220
- ④ 230
- ⑤ 240

해설

제 n 군의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= 220\end{aligned}$$

14. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. $a_4 = 72$ 일 때, a_5 의 값은?

① $72\sqrt{3}$

② $72\sqrt{6}$

③ 144

④ $144\sqrt{3}$

⑤ 216

해설

$a_{m+n} = 2a_m a_n$ 에 $m = 2, n = 2$ 를 대입하면 $a_4 = 2a_2 a_2 =$

$72, a_2^2 = 36$

$\therefore a_2 = 6(\because a_n > 0)$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$ 에 $m = 1, n = 1$ 을 대입하면

$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 a_1 = 6, a_1^2 = 3$

$\therefore a_1 = \sqrt{3}$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$ 에 $m = 4, n = 1$ 을 대입하면

$a_5 = a_{4+1} = 2a_4 a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

15. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

가. $a_1 = 2$

나. a_{n+1} 은 $3a_n$ 을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13} + a_{40}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$a_1 = 2$, $3a_1 = 6$ 을 5로 나눈 나머지는 1이므로

$a_2 = 1$ 같은 방법으로 $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$

$a_6 = 1, \dots, a_{13} = a_1 = 2$, $a_{40} = a_4 = 4$ 이므로

$\therefore a_{13} + a_{40} = 2 + 4 = 6$

16. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\log_4(a+2b) + \log_4\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ 3

해설

$$\log_4(a+2b) + \log_4\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \log_4\left(\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} + 4\right)$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 4$$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$$\log_4(4+4) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

17. $a = \log_3 \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ 일 때, $3^a - 3^{-a}$ 의 값은?

① $-2\sqrt{2}$

② -2

③ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

④ $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

⑤ $\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$

해설

$$a = \log_3 \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \text{에서}$$

$$3^a = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

$$3^{-a} = \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right)^{-1} = (\sqrt{5} - 1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$\begin{aligned} 3^a - 3^{-a} &= \sqrt{5} - 1 - \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \\ &= \frac{4\sqrt{5} - 4 - \sqrt{5} - 1}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{5} - 5}{4} \end{aligned}$$

18. 매월 초에 일정한 금액을 월이율 1%, 한 달마다 복리로 적립하여 5년 후에 2000만원을 만들려고 한다. 매달 얼마씩 적립해야 하는가?(단, $1.01^{60} = 1.8$ 로 계산하고, 천 원 단위에서 반올림한다.)

- ① 22만원
- ② 24만원
- ③ 25만원
- ④ 27만원
- ⑤ 28만원

해설

매월 초에 a 원씩 월이율 1%, 한 달마다 복리로 5년 동안 적립하여 2000만원을 만들어야 하므로

$$a(1 + 0.01) + a(a + 0.01)^2 + \cdots + a(1 + 0.01)^{60} = 20000000$$

$$\frac{a(1 + 0.01) \{ (1 + 0.01)^{60} - 1 \}}{(1 + 0.01) - 1} = 20000000$$

$$= \frac{1 \times 1.01 \times (1.8 - 1)}{0.01} = 20000000$$

$$80.8a = 20000000$$

$$\therefore a \approx 250000$$

따라서 매월 적립해야 할 금액은 25만원이다.

19. $a_1 = 8$, $a_4 = 1$ 이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n 에 대하여 수열 b_n 을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$ 으로 정의하면 수열 b_n 은 첫째항이 c 이고 공차가 d 인 등차수열이다. 이때, $c - d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a_4 = 8 \times r^3 = 1 \text{에서 } r^3 = \frac{1}{8}, r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{이므로 } a_{2n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\therefore b_n = \log_2 \left\{ 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \right\}^2 = 2 \log_2 2^{-2n+4}$$

$$= 2(-2n+4) = -4n+8$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공차가 -4인 등차수열이다.

$$\therefore c - d = 8$$

20. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 짝수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$ 이 참임을 증명한다.
 k 가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k + 2$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + 2)$ 가 참임을 증명해야 한다.
 $\therefore a = 2, \quad b = 2$
 $\therefore a + b = 4$

21. $\sqrt{7} = 100$ 일 때, $\frac{10^n - 10^{-n}}{10^n + 10^{-n}}$ 의 값은? (단, n 은 양의 정수이다.)

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ $\frac{4}{5}$
- ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

$\sqrt{7} = 100$ 의 양변을 n 제곱하면

$$7 = 100^n = 10^{2n}$$

$\frac{10^n - 10^{-n}}{10^n + 10^{-n}}$ 의 분자와 분모에 10^n 을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{(10^n - 10^{-n})10^n}{(10^n + 10^{-n})10^n} &= \frac{10^{2n} - 1}{10^{2n} + 1} \\ &= \frac{7 - 1}{7 + 1} \\ &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

22. $\log_2 7$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $3^a + 2^b$ 의 값은?(단, $0 \leq b < 1$)

① $\frac{41}{4}$

② $\frac{43}{4}$

③ $\frac{45}{4}$

④ $\frac{47}{4}$

⑤ $\frac{49}{4}$

해설

밑이 1보다 크면 진수가 클수록 로그 값도 크므로

$$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$$

$$\therefore 2 < \log_2 7 < 3$$

따라서, $\log_2 7$ 의 정수부분 $a = 2$,

정수 부분이 2이므로 소수 부분은

$$b = \log_2 7 - 2 = \log_2 7 - \log_2 4 = \log_2 \frac{7}{4}$$

$$\therefore 3^a + 2^b = 3^2 + 2^{\log_2 \frac{7}{4}} = 9 + \frac{7}{4} = \frac{43}{4}$$

23. 아래 표는 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, ... 을 왼쪽 위에서부터 대각선으로
썬내려간 것이다. 이 때, 위에서 첫 번째, 왼쪽에서 16 번째 칸의 수를
구하여라.

1	0	0	4	6	...	
2	3	0	0			
0	5	7				
0	0					

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

주어진 수를 군수열로 나타내면
(1), (0, 2), (0, 3, 0), (4, 0, 5, 0), ... 이고,
구하고자 하는 수는 제16군의 첫째 항이다.
제 15군까지의 항의 개수가 $1 + 2 + \cdots + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$
그러므로 구하는 수는 수열의 제121 항이다.
1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, ... 에서 $2n$ 번째 항은 모두 0 이고,
 $2n - 1$ 번째 항은 n 이다.
 $\therefore 2n - 1 = 121$
 $\therefore n = 61$

24. 다음은 정수 m, n 에 대하여 성립하는 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n} (a > 0)$ 을 유리수 지수로 확장할 수 있음을 증명한 것이다.

증명

m, n 을 유리수라 하면 정수 $p, q, r, s (p > 0, r > 0)$ 에 대하여 $m = \frac{q}{p}, n = \frac{s}{r}$ 로 나타낼 수 있다.
이때,
$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{s}{r}} = \sqrt[p]{a^{qr}} \sqrt[r]{a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr} a^{ps}} = \sqrt[p]{a^{(qr+ps)}} \\ a &= a^{\frac{qr+ps}{pr}} = a^{\frac{q}{p} + \frac{s}{r}} = a^{m+n} \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

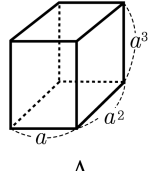
- ① (가) : pr , (나) : $qr + ps$
- ② (가) : pr , (나) : $pq + rs$
- ③ (가) : qs , (나) : $qr + ps$
- ④ (가) : qs , (나) : $pq + rs$
- ⑤ (가) : pq , (나) : $pq + rs$

해설

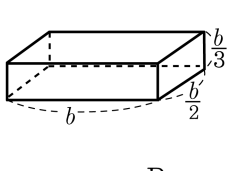
m, n 이 유리수라 하면 정수 $p, q, s (p > 0, r > 0)$ 에 대하여 $m = \frac{q}{p}, n = \frac{s}{r}$ 로 나타낼 수 있다.
이때,
$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{s}{r}} = a^{\frac{qr}{pr}} a^{\frac{ps}{pr}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr}} \cdot \sqrt[p]{a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr} \cdot a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr+ps}} \\ &= a^{\frac{qr+ps}{pr}} = a^{\frac{q}{p} + \frac{s}{r}} = a^{m+n} \end{aligned}$$

따라서, (가) : pr , (나) : $qr + ps$

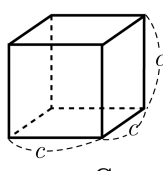
25. 다음 그림과 같은 직육면체 A, B, C 각각의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 순서쌍으로 나타내면 $(a, a^2, a^3), \left(b, \frac{b}{2}, \frac{b}{3}\right), (c, c, c)$ 이다. 직육면체 A, B, C 의 부피를 각각 4, 9, 16이라고 할 때, 가로의 길이 a , 세로의 길이 b , 높이 c 인 직육면체의 부피를 구하여라.



A



B



C

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$a \cdot a^2 \cdot a^3 = 4 \text{ 에서 } a^6 = 4, a^3 = 2 \therefore a = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{3} = 9 \text{ 에서 } \frac{b^3}{6} = 9, b^3 = 54$$

$$\therefore b = \sqrt[3]{54} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$c \cdot c \cdot c = 16 \text{ 에서 } c^3 = 16$$

$$\therefore c = \sqrt[3]{16} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

따라서, 가로의 길이 a , 세로의 길이 b , 높이 c 인 직육면체의 부피는 $abc = \left(2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) = 12$