1. 수열 $1, \ -2, \ 3, \ -4, \ 5, \ \cdots$ 의 11 번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11 번째 항은 11 이다.

2. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_{10}$을 넣어 12개의 수 $48,\ a_1,\ a_2,\ \cdots, a_{10},\ 2$가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\dfrac{12(48+2)}{2}=300$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=300-(48+2)=300-50=250$

3. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$이다.

따라서 $\frac{1}{(가)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\quad \therefore\ (가)=\frac{3}{2}$

4. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$S_n = 94$에서 $\dfrac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47 \quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4 \quad \therefore\ d = \dfrac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2 \quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1 \quad \therefore\ d = -\dfrac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

5. 세 수 $x-4,\ x,\ x+8$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x가 $x-4,\ x,\ x+8$의 등비중항이므로

$x^2=(x-4)(x+8),\ x^2=x^2+4x-32$

$4x=32 \therefore x=8$

6. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore\ S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

7. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^{5} 2^k$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67$$

8. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 이 정의되기 위한 실수 x 의 값의 범위를 구하면?

① $3 < x < 4$　　② $5 < x < 7$　　③ $-1 < x < 3$

④ $x > 0$　　⑤ $2 < x < 5$

해설

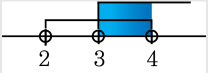
$x-3 \neq 1,\ \ x-3 > 0,$

$-x^2+6x-8 > 0$ 이므로

$x \neq 4,\ \ x > 3$

$x^2-6x+8 < 0$

$2 < x < 4$



$\therefore 3 < x < 4$

9. 수열 $1 \cdot 1,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 5,\ 4 \cdot 7, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2 - k)$

$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\left\{2(2n+1) - 3\right\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

10. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$ 의 값은?

① $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

② $\frac{n(3n+5)}{4(2n+1)(n+2)}$

③ $\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$

④ $\frac{n(3n+4)}{4(n+1)(n+2)}$

⑤ $\frac{n(3n+4)}{2(n+1)(n+2)}$

해설

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right\}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

11. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$ ② $\dfrac{11}{10}$ ③ $\dfrac{10}{11}$ ④ $\dfrac{20}{11}$ ⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

12. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 30

해설

$$30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$$
$$= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29})$$
$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30$$

13. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(1, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 3, 4)$\cdots$

① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

해설

제n군의 합을 a_n이라 하면

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10} k(k+1)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \frac{10\cdot 11}{2}\right)\\ &= 220\end{aligned}$$

14. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 m, n에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_4 = 72$일 때, a_5의 값은?

① $72\sqrt{3}$　② $72\sqrt{6}$　③ 144

④ $144\sqrt{3}$　⑤ 216

해설

$a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 2$, $n = 2$를 대입하면 $a_4 = 2a_2 a_2 = 72$, $a_2^2 = 36$

$\therefore\ a_2 = 6 (\because\ a_n > 0)$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 1$, $n = 1$을 대입하면

$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 a_1 = 6$, $a_1^2 = 3$

$\therefore\ a_1 = \sqrt{3}$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_m a_n$에 $m = 4$, $n = 4$를 대입하면

$a_5 = a_{4+1} = 2a_4 a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

15. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

가. $a_1 = 2$ 나. a_{n+1}은 $3a_n$을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13} + a_{40}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a_1 = 2,\ 3a_1 = 6$을 5로 나눈 나머지는 1이므로

$a_2 = 1$ 같은 방법으로 $a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = 2$

$a_6 = 1,\ \cdots,\ a_{13} = a_1 = 2,\ a_{40} = a_4 = 4$이므로

$\therefore\ a_{13} + a_{40} = 2 + 4 = 6$

16. $a>0, b>0$ 일 때, $\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ 3

해설

$$\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4\right)$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4$$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$$\log_4(4+4)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$$

17. $a = \log_3 \sqrt{6-2\sqrt{5}}$일 때, $3^a - 3^{-a}$의 값은?

① $-2\sqrt{2}$　② -2　③ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

④ $\dfrac{3\sqrt{5}-5}{4}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}+5}{4}$

해설

$a = \log_3 \sqrt{6-2\sqrt{5}}$에서

$$3^a = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$$

$$3^{-a} = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^{-1} = (\sqrt{5}-1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$3^a - 3^{-a} = \sqrt{5}-1-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}-4-\sqrt{5}-1}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}-5}{4}$$

18. 매월 초에 일정한 금액을 월이율 1%, 한 달마다 복리로 적립하여 5년 후에 2000만원을 만들려고 한다. 매달 얼마씩 적립해야 하는가?(단, $1.01^{60}=1.8$로 계산하고, 천 원 단위에서 반올림한다.)

① 22만원 ② 24만원 ③ 25만원
④ 27만원 ⑤ 28만원

해설

매월 초에 a원씩 월이율 1%, 한 달마다 복리로 5년 동안 적립하여 2000만원을 만들어야 하므로

$$a(1+0.01)+a(a+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{60}=20000000$$

$$\frac{a(1+0.01)\left\{(1+0.01)^{60}-1\right\}}{(1+0.01)-1}=20000000$$

$$=\frac{1\times1.01\times(1.8-1)}{0.01}=20000000$$

$$80.8a=20000000$$

$$\therefore\ a\fallingdotseq250000$$

따라서 매월 적립해야 할 금액은 25만원이다.

19. $a_1 = 8,\ a_4 = 1$이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n에 대하여 수열 b_n을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$으로 정의하면 수열 b_n은 첫째항이 c이고 공차가 d인 등차수열이다. 이때, $c - d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a_4 = 8 \times r^3 = 1$에서 $r^3 = \dfrac{1}{8},\ r = \dfrac{1}{2}$

$a_n = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $a_{2n} = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$$\therefore\ b_n = \log_2 \left\{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}^2 = 2\log_2 2^{-2n+4}$$

$= 2(-2n + 4) = -4n + 8$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 -4인 등차수열이다.

$\therefore\ c - d = 8$

20. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$이 참임을 증명한다.
k가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.

$\therefore a=2, \quad b=2$

$\therefore a+b=4$

21. $\sqrt[n]{7} = 100$ 일 때, $\dfrac{10^n - 10^{-n}}{10^n + 10^{-n}}$ 의 값은? (단, n은 양의 정수이다.)

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{6}{7}$

해설

$\sqrt[n]{7} = 100$ 의 양변을 n제곱하면

$7 = 100^n = 10^{2n}$

$\dfrac{10^n - 10^{-n}}{10^n + 10^{-n}}$ 의 분자와 분모에 10^n 을 곱하면

$$\frac{(10^n - 10^{-n})10^n}{(10^n + 10^{-n})10^n} = \frac{10^{2n} - 1}{10^{2n} + 1} = \frac{7-1}{7+1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

22. $\log_2 7$ 의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b 라 할 때, $3^a + 2^b$ 의 값은?(단, $0 \le b < 1$)

① $\frac{41}{4}$ ② $\frac{43}{4}$ ③ $\frac{45}{4}$ ④ $\frac{47}{4}$ ⑤ $\frac{49}{4}$

해설

밑이 1보다 크면 진수가 클수록 로그 값도 크므로

$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$

$\therefore\ 2 < \log_2 7 < 3$

따라서, $\log_2 7$ 의 정수부분 $a = 2$,

정수 부분이 2이므로 소수 부분은

$b = \log_2 7 - 2 = \log_2 7 - \log_2 4 = \log_2 \frac{7}{4}$

$\therefore\ 3^a + 2^b = 3^2 + 2^{\log_2 \frac{7}{4}} = 9 + \frac{7}{4} = \frac{43}{4}$

23. 아래 표는 $1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5,\cdots$ 을 왼쪽 위에서부터 대각선으로 써내려간 것이다. 이 때, 위에서 첫 번째, 왼쪽에서 16번째 칸의 수를 구하여라.

1	0	0	4	6	$\cdots$	
2	3	0	0			
0	5	7				
0	0					

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

주어진 수를 군수열로 나타내면

$(1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3,\ 0),\ (4,\ 0,\ 5,\ 0),\cdots$ 이고,

구하고자 하는 수는 제16군의 첫째 항이다.

제 15군까지의 항의 개수가 $1+2+\cdots+15=\dfrac{15\cdot16}{2}=120$

그러므로 구하는 수는 수열의 제121항이다.

$1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5,\cdots$ 에서 $2n$번째 항은 모두 0이고,

$2n-1$번째 항은 n이다.

$\therefore 2n-1=121$

$\therefore n=61$

24. 다음은 정수 m, n에 대하여 성립하는 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}(a > 0)$을 유리수 지수로 확장할 수 있음을 증명한 것이다.

증명

$m,\ n$을 유리수라 하면 정수 $p,\ q,\ r,\ s(p > 0,\ r > 0)$에 대하여 $m = \dfrac{q}{p},\ n = \dfrac{s}{r}$로 나타낼 수 있다.
이때,
$a^m a^n = a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{s}{r}} = \sqrt[(가)]{a^{qr}}\ \sqrt[(가)]{a^{ps}}$
$= \sqrt[(가)]{a^{qr} a^{ps}} = \sqrt[(가)]{a^{(나)}}$
$a =^{\frac{q}{p}+\frac{s}{r}} = a^{m+n}$

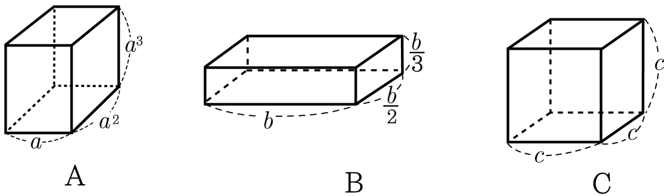
위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : pr, (나) : $qr + ps$
② (가) : pr, (나) : $pq + rs$
③ (가) : qs, (나) : $qr + ps$
④ (가) : qs, (나) : $pq + rs$
⑤ (가) : pq, (나) : $pq + rs$

해설

$m,\ n$이 유리수라 하면 정수 $p,\ q,\ s(p > 0,\ r > 0)$에 대하여
$m = \dfrac{1}{p},\ n = \dfrac{s}{r}$로 나타낼 수 있다.
이때,
$a^m a^n = a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{s}{r}} = a^{\frac{qr}{pr}} a^{\frac{ps}{pr}}$
$= \sqrt[pr]{a^{qr}} \cdot \sqrt[pr]{a^{ps}}$
$= \sqrt[pr]{a^{qr} \cdot a^{ps}}$
$= \sqrt[pr]{a^{qr+ps}}$
$= a^{\frac{qr+ps}{pr}} = a^{\frac{q}{p}+\frac{s}{r}} = a^{m+n}$
따라서, (가) : pr, (나) : $qr + ps$

25. 다음 그림과 같은 직육면체 A, B, C 각각의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 순서쌍으로 나타내면 $(a,\ a^2,\ a^3)$, $\left(b,\ \dfrac{b}{2},\ \dfrac{b}{3}\right)$, $(c,\ c,\ c)$이다. 직육면체 A, B, C의 부피를 각각 4, 9, 16이라고 할 때, 가로의 길이 a, 세로의 길이 b, 높이 c인 직육면체의 부피를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a \cdot a^2 \cdot a^3 = 4$에서 $a^6 = 4,\ a^3 = 2 \therefore a = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$b \cdot \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{b}{3} = 9$에서 $\dfrac{b^3}{6} = 9,\ b^3 = 54$

$\therefore b = \sqrt[3]{54} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$c \cdot c \cdot c = 16$에서 $c^3 = 16$

$\therefore c = \sqrt[3]{16} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

따라서, 가로의 길이 a, 세로의 길이 b, 높이 c인 직육면체의 부피는 $abc = \left(2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) = 12$