1. $3^x = 2$ 일 때, $(\frac{1}{9})^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(\frac{1}{9})^{-x} = (3^{-2})^{-x} = 3^{2x} = (3^x)^2 = 4$

2. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$의 값은?

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$\frac{10(2a+9d)}{2} = 120 \quad \therefore\ 2a+9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a+3d)+(a+6d) = 2a+9d = 24$$

3. 첫째항이 1, 공비가 8 인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \log_2 a_n$ 으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 135

해설

$a_n = 8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3}$

$b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{3n-3}$

b_n은 첫째항이 0, 공차가 3 인 등차수열

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 3\}}{2}$$

$$= 5 \cdot 27 = 135$$

4. 세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2x=1+5=6 \quad \therefore x=3$

세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2=5$

따라서 $x^2+y^2=14$

5. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$

$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$

$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

6. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

① 9 ② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{99}-1$

④ $\sqrt{101}-1$ ⑤ 11

해설

$$(\text{준식})=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$=\sqrt{100}-1=9$$

7. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$ ② $\frac{100}{101}$ ③ $\frac{200}{201}$ ④ $\frac{110}{101}$ ⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$

$\left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$

8. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_9$ ② $a_{20}-a_{10}$ ③ $a_{21}-a_9$

④ $a_{21}-a_{10}$ ⑤ $a_{21}-a_{11}$

해설

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ 이므로

$a_{21}=a_1+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}$

$b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$

$=a_{21}-(a_1+b_1+b_2+\cdots b_9)$

$=a_{21}-a_{10}$

9. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[3]{-64}=-4$

② $\sqrt[4]{81}=3$

③ $\sqrt[5]{-32}=-2$

④ $-\sqrt[3]{0.008}=-0.2$

⑤ $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=1$

해설

⑤$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})$
$=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{2^3}=5$

10. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}} + \sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 4017

해설

(준식)$= |-2014| + (-2015) = -1$

11. $\left(\dfrac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\left(\dfrac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3} = \left(\dfrac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= (3^{2\sqrt{2}-3})^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= 3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$= 3^{8-9} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$$

12. $\log_{10} 5 = a$, $\log_{10} 7 = b$라 할 때, 다음 중 $pa + qb + r$의 꼴로 나타낼 수 없는 것은? (단, p, q, r은 유리수)

① $\log_{10} 20$ ② $\log_{10} 3.5$ ③ $\log_{10} 75$

④ $\log_{10} \sqrt{14}$ ⑤ 1

해설

$\log_{10} 75 = \log_{10} 25 \times 3 = \log_{10} 5^2 + \log_{10} 3$

$= 2 \cdot a + 0 \cdot b + \log_{10} 3$

$\log_{10} 3$은 유리수가 아니므로

$\log_{10} 75$는 $pa + qb + r$(p, q, r은유리수) 의 꼴로 나타낼 수 없다.

13. 함수 $f(x)$에 대하여 $f(20^x) = \dfrac{1}{x} - \log_3 5$일 때, $f(3)$의 값은?

① 1　　② 3　　③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$　　⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$20^x = 3$이라 하면 $x = \log_{20} 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

14. 다음 <보기> 의 상용로그 중 그 소수 부분이 $\log 55$ 의 소수 부분과 같은 것의 개수를 구하면? (단, $\log 550 = 2.7404$)

보기

ㄱ $\log 5.05$

ㄴ $\log 0.00055$

ㄷ $\log \dfrac{1}{550}$

ㄹ $\log(5.5 \times 10^{10})$

ㅁ $\log 5.5^{10}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\log 550$ 의 진수 550 과 소숫점의 위치만 다르고 숫자의 배열이 같은 수의 상용로그의 소수 부분은 $\log 550$ 의 소수 부분과 같다. 따라서 <보기> 중 $\log 550$ 과 소수 부분이 같은 것은 ㄴ, ㄹ 의 2 개이다.

15. 등차수열 $3, 7, 11, 15, \cdots$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다. 이때, ㉠+ ㉡+ ㉢의 값을 구하여라.

$$[㉠] = \frac{3+[㉡]}{2}$$
$$[㉡] = \frac{[㉢]+15}{2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \dfrac{3+11}{2}$, $11 = \dfrac{7+15}{2}$ 가 성립하므로

㉠는 7, ㉡는 11, ㉢는 7이다.

$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ $= 7 + 11 + 7 = 25$

16. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10} = 85,\ S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots ㉠$$

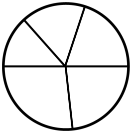
$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -5,\ d = 3$

$$\therefore\ S_{30} = \frac{30\{2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3\}}{2} = 1155$$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

17. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$이다. 이때 k의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$라 하면

$2(a-2d)=a+2d$

$2a-4d=a+2d$

$a=6d$

$\therefore 4d,\ 5d,\ 6d,\ 7d,\ 8d$

그런데 $\dfrac{5(4d+8d)}{2}=15^2\pi$

$6d=45\pi$

$d=\dfrac{15}{2}\pi$

$\therefore 8d=8\cdot\dfrac{15}{2}\pi=60\pi$

$\therefore k=60$

18. 서로 다른 세 수 a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루고 있다. b와 c 사이에 두 수를 넣어 5개의 수가 등차수열을 이루도록 하였다. 이때, $\dfrac{b+c}{a}$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

b와 c사이에 두 수를 넣어 만들어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$b = a + d,\ c = a + 4d \cdots$ ㉠

세 수 a, b, c가 등비수열을 이루므로

$(a+d)^2 = a(a+4d)$

$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad$

$\therefore\ d = 2a$

㉠에서 $b = 3a,\ c = 9a$

$\therefore\ \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{3a+9a}{a} = 12$

19. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$이라 할 때 $p + q$의 값을 구하여라.

보기

· $a_1 = 1, \ a_2 = 2$
· $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore \ p = 3, \ q = -48$이므로 $p + q = -45$

20. $a_1 = 9,\ a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수}) \\ a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수}) \end{cases}$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=11}^{20} a_k$ 의 값은?

① 15 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

$a_1 = 9,\ a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수}) \\ a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수}) \end{cases}$ 이므로 대입하면

$a_2 = 10,\ a_3 = 5,\ a_4 = 6,\ a_5 = 3,\ a_6 = 4,$

$a_7 = 2,\ a_8 = 1,\ a_9 = 2,\ a_{10} = 1,\ \cdots$ 로 $n \geq 7$이면 a_n은 2와 1이 교대로 나온다.

$$\therefore \sum_{k=11}^{20} a_k = 2+1+2+1+\cdots+2+1$$

$$= 2\times 5 + 1\times 5 = 15$$

21. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$
② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$
③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$
④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$
⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

해설

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

22. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\log_{10} 2 \cdot (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{99})$
$= \log_{10} \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99}$
$= \log_{10} 100 = 2$

23. $\log 5.36 = 0.7292$, $\log 1.959 = 0.2920$ 일 때, 0.536^{10} 는?

① 0.1959　　② 0.01959　　③ 0.001959

④ 0.00292　　⑤ 0.005364

해설

$$\log 0.536^{10}$$

$$= 10\log 0.536 = 10\log\frac{5.36}{10}$$

$$= 10(\log 5.36 - 1) = 10(0.7292 - 1)$$

$$= -2.708 = -3 + (1 - 0.708)$$

$$= -3 + 0.292 = -3 + \log 1.959$$

$$= \log\frac{1}{1000} + \log 1.959$$

$$= \log 0.001959$$

24. 해수면의 빛의 밝기가 A 인 어느 지역의 바닷물은 깊이가 일정하게 깊어질수록 빛의 밝기가 일정한 비율로 감소한다고 한다. 깊이가 xm 인 곳의 빛의 밝기를 L이라 하면 다음과 같은 관계가 있다.

$L = Ak^x$(단, k는 $k \neq 1$ 인 양의 상수)

이 지역의 바다에서 깊이가 20m 인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기의 50% 일 때, 물속에서의 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$ 이 되는 지점의 수심은 am 이다. 이때, 실수 a 의 값을 구하여라. (단, $\log_2 3 = 1.6$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

깊이가 20m 인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기 A 의 50% 이므로

$$Ak^{20} = \frac{1}{2}A \quad \therefore\ k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{20}}$$

따라서, 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$ 이 되는 지점의 수심을 xm 라 하면

$$A \cdot 2^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{6}A \quad \therefore 2^{-\frac{z}{20}} = \frac{1}{6}$$

위의 식의 양변에 밑이 2 인 로그를 취하면

$$-\frac{x}{20} = \log_2 \frac{1}{6} = -\log_2 6$$

$$\therefore\ x = 20(\log_2 2 + \log_2 3)$$

$$= 20(2 + 1.6) = 72(\text{m})$$

25. 아래 표는 $1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5, \cdots$ 을 왼쪽 위에서부터 대각선으로 써내려간 것이다. 이 때, 위에서 첫 번째, 왼쪽에서 16 번째 칸의 수를 구하여라.

1	0	0	4	6	$\cdots$	
2	3	0	0			
0	5	7				
0	0					

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

주어진 수를 군수열로 나타내면

$(1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3,\ 0),\ (4,\ 0,\ 5,\ 0), \cdots$ 이고,

구하고자 하는 수는 제16군의 첫째 항이다.

제 15군까지의 항의 개수가 $1 + 2 + \cdots + 15 = \dfrac{15 \cdot 16}{2} = 120$

그러므로 구하는 수는 수열의 제121항이다.

$1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5, \cdots$ 에서 $2n$ 번째 항은 모두 0 이고,

$2n - 1$ 번째 항은 n 이다.

$\therefore 2n - 1 = 121$

$\therefore n = 61$