1. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2$
$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$

3. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, a_3+a_4의 값은?

$$a_1=3,\ a_2=6,\ a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}\,(n=1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1}=3,\ \frac{1}{a_2}=6$이므로

$\frac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot 3=3n,\ a_n=\frac{1}{3n}$

$a_3=\frac{1}{9},\ a_4=\frac{1}{12}\quad\therefore\ a_3+a_4=\frac{7}{36}$

4. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-5)$

$= 2 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$

$= n^2 - 6n + 7$

$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

5. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 제 10 항은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$a_{n+1} - a_n = 2$ 의 양변에
$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots, (n-1)$ 을 대입하여 변끼리
더하면

$$\begin{array}{l} a_2 - a_1 = 2 \\ a_3 - a_2 = 2 \\ a_4 - a_3 = 2 \\ \quad \vdots \\ \underline{+)\, a_n - a_{n-1} = 2} \\ a_n - a_1 = 2(n-1) \end{array}$$

$\therefore a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n + 1$
$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

해설

첫째항이 3, 공차가 2인 등차
수열이므로 $a_n = 2n + 1$
$\therefore a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$

6. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = \frac{1}{a_n}$이라 할 때, $a_{15}b_{20}$의 값은?

① 3　② 9　③ 27　④ 81　⑤ 243

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}$　$\therefore\ b_n = 3^{n-1}$

$\therefore\ a_{15}b_{20} = \frac{1}{3^{14}} \cdot 3^{19} = 3^5 = 243$

7. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\vdots$$

$$+\underline{\left|\ a_n = a_{n-1} + (n-1)\right.}$$

$$a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1)$$

$$= -1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= -1 + 45 = 44$$

8. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

10. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = -a_n + 2$와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

① $1 + (-1)^n$ ② $2 + (-1)^n$ ③ $3 + (-1)^n$
④ $4 + (-1)^n$ ⑤ $5 + (-1)^n$

해설

$a_{n+1} = -a_n + 2$에서
$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$
이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1$, 공비가 -1인 등비수열이므로
$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$
$\therefore\ a_n = 1 + (-1)^n$

11. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

① $\dfrac{1}{n}$　② $\dfrac{1}{n+1}$　③ $\dfrac{1}{n+2}$　④ $\dfrac{2}{n}$　⑤ $\dfrac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 1$, 즉 $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 1$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 1 인 등차 수열이므로

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \dfrac{1}{n}$

12. $a_1 = 3,\ a_2 = \frac{3}{7},\ \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \frac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$은 등차수열을 이룬다. 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 d라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항 $\frac{1}{a_n}$은

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$

$\therefore\ a_n = \frac{3}{6n-5}$

$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50}$에서 $n \geq 25.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 26이다.

13. 어떤 세포의 집합은 1 시간이 지나면 세포 2 개는 죽고 나머지는 각각 2 배로 분열한다고 한다. 처음 세포의 개수가 7 개일 때, n 시간 후의 세포의 개수를 a_n 이라 하면, 다음 중 옳은 것은?

① $a_{n+1} = 2a_n - 7$　　② $a_{n+1} = 2(a_n - 7)$

③ $a_{n+1} = a_n - 2$　　④ $a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

⑤ $a_{n+1} = 2a_n - 2$

해설

$a_1 = 2 \times (7-2) = 10$
$a_2 = 2 \times (a_1 - 2)$
$a_3 = 2 \times (a_2 - 2)$
$a_4 = 2 \times (a_3 - 2)$
$\vdots$
$a_n = 2(a_{n-1} - 2)$
$\therefore\ a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

14. 높이가 h 인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n 번째 날의 탑의 높이를 a_n 이라 하면 $(n+1)$ 째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n 과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$a_1 = \frac{h}{2}$ 이고, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$

$\therefore a_n = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10} = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{h}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

즉, $a = \frac{h}{3}$ 이므로 $\frac{a}{h} = \frac{1}{3}$

15. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$를 10으로 나눈 나머지는?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 2013$을
차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.

$$\begin{aligned} a_n &= n \times (n-1) \times \cdots \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n \end{aligned}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6,$
$a_4 = 24,\ a_5 = 120,\ a_6 = 6a_5,$
$a_7 = 7a_6,\ \cdots$
따라서, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$을 10으로
나눈 나머지는 3이다.

16. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$이라 할 때 $p + q$의 값을 구하여라.

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,$ $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$

$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라하면

$2b_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

$\therefore \{b_n\}$은 초항이 1 이고

공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열

$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_2 - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$a_3 - a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\vdots$$

$$+\underline{\ a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$

$a_n - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_n = 1 + \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= 1 + 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$= 3 - 2 \cdot 2^{-n+1}$

$a_n = 3 - 2^{-n+2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$p = 3,\ q = -48\ \ \therefore p + q = -45$

17. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ 3a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n\ (n \geq 1)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^9$　　② $\frac{8}{5} + \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^9$

③ $-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^9$　　④ $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$

⑤ $\frac{8}{5} + \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$

해설

$3a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ 에서

$3a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n - 3a_{n+1}$

$3(a_{n+2} - a_{n+1}) = -2(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n)$

이때, $a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1},\ a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면

$b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n$

따라서 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ 이고,

공비가 $-\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$b_n = 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$= 1 + \dfrac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}$

$= \frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10} = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^9$

18. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

I. $a_1 = 3$
II. a_{n+1}은 ${a_n}^2$을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 20 ② 24 ③ 35 ④ 40 ⑤ 42

해설

$a_1 = 3$
$a_2 = 2$
$a_3 = 4$
$a_4 = 2$
$\vdots$

즉, $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$

19. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$이 성립하고 $a_6 = 62$라 할 때, $a_1 + a_2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$에서

$a_3 = a_1 + a_2$

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$

$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$

$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$

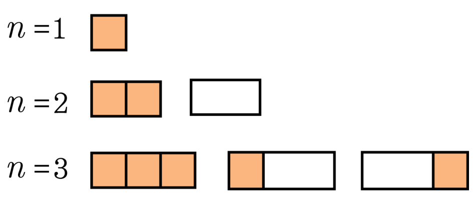
$\therefore\ 3a_1 + 5a_2 = 62$

$a_1,\ a_2$의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$이므로

$a_1 = 4,\ a_2 = 10$

$\therefore\ a_1 + a_2 = 14$

20. 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1인 직사각형을 가로와 세로의 길이가 모두 1인 타일과 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 1인 타일로 채우려고 한다. 이때, 타일을 채우는 방법은 그림과 같이 $n = 1$인 경우는 1가지, $n = 2$인 경우는 2가지, $n = 3$인 경우는 3가지가 존재한다. 가로의 길이 n에 대하여 타일로 직사각형을 채우는 방법의 수를 a_n이라 할 때, a_{10}의 값을 구하여라.
(단, n은 자연수이다.)



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 89가지

해설

a_n은 마지막에 놓는 타일이 가로의 길이가 1인 경우와 2인 경우 2가지가 있으므로
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$가 성립한다. 그러므로
$a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$
즉, 가로의 길이가 10인 직사각형을 두 종류의 타일로 채우는 경우의 수는 89가지이다.