

1. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$ 의 값은?

$$a_1 = 3, a_2 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1, 2, 3)$$

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{5}{12}$

③ $\frac{7}{16}$

④ $\frac{5}{24}$

⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$ 은 조화수열이다. 따라서

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3, \frac{1}{a_2} = 6$ 이므로

$$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n, a_n = \frac{1}{3n}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{12} \quad \therefore a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$$

4. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$ 일 때, a_{30} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= b_n = 2n - 5 \\ \therefore a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 5) \\ &= 2 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 5(n-1) \\ &= n^2 - 6n + 7 \\ \therefore a_{30} &= 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727\end{aligned}$$

5. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 제 10항은?

① 13

② 15

③ 17

④ 19

⑤ 21

해설

$a_{n+1} - a_n = 2$ 의 양변에

$n = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 을 대입하여 변끼리

더하면

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 2$$

$$a_4 - a_3 = 2$$

$\vdots$

$$+) a_n - a_{n-1} = 2$$

$$a_n - a_1 = 2(n-1)$$

$$\therefore a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n + 1$$

$$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$$

해설

첫째항이 3, 공차가 2인 등차

수열이므로 $a_n = 2n + 1$

$$\therefore a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$$

6. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $b_n = \frac{1}{a_n}$ 이라 할 때, $a_{15}b_{20}$ 의 값은?

① 3

② 9

③ 27

④ 81

⑤ 243

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \therefore b_n = 3^{n-1}$$

$$\therefore a_{15}b_{20} = \frac{1}{3^{14}} \cdot 3^{19} = 3^5 = 243$$

7. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ + & \left[\begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{10} &= -1 + \frac{9 \cdot 10}{2} \\ &= -1 + 45 = 44 \end{aligned}$$

8. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 수열 $\{a_n\}$ 이 정의될 때, a_n 을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$$

9. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 이 성립하고 $a_1 = 1$ 일 때, $a_{10} + 1$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ 에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$ 이므로 $\alpha = -1$

$$\therefore a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

수열 $\{a_n + 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$ 이고 공비 2인 등비수열이다.

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \text{이므로}$$

$$a_{10} + 1 = 2^{10}$$

10. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = -a_n + 2$ 와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?(단, $n = 1, 2, 3, \dots$)

① $1 + (-1)^n$

② $2 + (-1)^n$

③ $3 + (-1)^n$

④ $4 + (-1)^n$

⑤ $5 + (-1)^n$

해설

$$a_{n+1} = -a_n + 2 \text{에서}$$

$$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 1$, 공비가 -1 인 등비수열이므로

$$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$$

$$\therefore a_n = 1 + (-1)^n$$

11. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

① $\frac{1}{n}$

② $\frac{1}{n+1}$

③ $\frac{1}{n+2}$

④ $\frac{2}{n}$

⑤ $\frac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1, \text{ 즉 } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 1인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \frac{1}{n}$$

12. $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{3}{7}$, $\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{ 에서 } n \geq 25. \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

13. 어떤 세포의 집합은 1시간이 지나면 세포 2개는 죽고 나머지는 각각 2배로 분열한다고 한다. 처음 세포의 개수가 7개일 때, n 시간 후의 세포의 개수를 a_n 이라 하면, 다음 중 옳은 것은?

① $a_{n+1} = 2a_n - 7$

② $a_{n+1} = 2(a_n - 7)$

③ $a_{n+1} = a_n - 2$

④ $a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

⑤ $a_{n+1} = 2a_n - 2$

해설

$$a_1 = 2 \times (7 - 2) = 10$$

$$a_2 = 2 \times (a_1 - 2)$$

$$a_3 = 2 \times (a_2 - 2)$$

$$a_4 = 2 \times (a_3 - 2)$$

$\vdots$

$$a_n = 2(a_{n-1} - 2)$$

$$\therefore a_{n+1} = 2(a_n - 2)$$

14. 높이가 h 인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n 번째 날의 탑의 높이를 a_n 이라 하면 $(n+1)$ 째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n 과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$$a_1 = \frac{h}{2} \text{이고, } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{h}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$\text{즉, } a = \frac{h}{3} \text{이므로 } \frac{a}{h} = \frac{1}{3}$$

15. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}$ 를 10으로 나눈 나머지는?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$n = 1, 2, 3, \dots, 2013$ 을
차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.

$$\begin{aligned} a_n &= n \times (n-1) \times \dots \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \end{aligned}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6,$$

$$a_4 = 24, a_5 = 120, a_6 = 6a_5,$$

$$a_7 = 7a_6, \dots$$

따라서, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}$ 을 10으로
나눈 나머지는 3이다.

16. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

$$a_1 = 1, a_2 = 2,$$

$$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0 \text{ (단, } n = 1, 2, 3, \dots)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$$

$$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n \text{ 이라 하면}$$

$$2b_{n+1} = b_n, b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

$\therefore \{b_n\}$ 은 초항이 1이고

공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_2 - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$a_3 - a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\vdots$$

$$+ \left[a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right]$$

$$a_n - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_n = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= 3 - 2 \cdot 2^{-n+1}$$

$$a_n = 3 - 2^{-n+2}$$

$$a_{50} = 3 - 2^{-48}$$

$$p = 3, q = -48 \therefore p + q = -45$$

17. $a_1 = 1, a_2 = 2, 3a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n (n \geq 1)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^9$

② $\frac{8}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^9$

③ $-\frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^9$

④ $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$

⑤ $\frac{8}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$

해설

$3a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ 에서

$$3a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n - 3a_{n+1}$$

$$3(a_{n+2} - a_{n+1}) = -2(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n)$$

이때, $a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1}$, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n$$

따라서 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ 이고,

공비가 $-\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$b_n = 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^9$$

18. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

I. $a_1 = 3$

II. a_{n+1} 은 a_n^2 을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값은?

① 20

② 24

③ 35

④ 40

⑤ 42

해설

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 4$$

$$a_4 = 2$$

$\vdots$

$$\text{즉, } \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$$

19. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$ 이 성립하고 $a_6 = 62$ 라 할 때, $a_1 + a_2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{에서}$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$$

$$\therefore 3a_1 + 5a_2 = 62$$

a_1, a_2 의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$ 이므로

$$a_1 = 4, a_2 = 10$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 14$$

20. 가로와 세로의 길이가 n , 세로의 길이가 1인 직사각형을 가로와 세로의 길이가 모두 1인 타일과 가로와 세로의 길이가 2, 세로의 길이가 1인 타일로 채우려고 한다. 이때, 타일을 채우는 방법은 그림과 같이 $n = 1$ 인 경우는 1가지, $n = 2$ 인 경우는 2가지, $n = 3$ 인 경우는 3가지가 존재한다. 가로의 길이 n 에 대하여 타일로 직사각형을 채우는 방법의 수를 a_n 이라 할 때, a_{10} 의 값을 구하여라.
(단, n 은 자연수이다.)

$$n=1 \quad \text{[1x1 tile]}$$

$$n=2 \quad \text{[2x1 tiles] or [1x2 tiles]}$$

$$n=3 \quad \text{[3x1 tiles], [2x1 and 1x1 tiles], or [1x1 and 1x2 tiles]}$$

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 89가지

해설

a_n 은 마지막에 놓는 타일이 가로의 길이가 1인 경우와 2인 경우 2가지가 있으므로

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 가 성립한다. 그러므로
 $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$

즉, 가로의 길이가 10인 직사각형을 두 종류의 타일로 채우는 경우의 수는 89가지이다.