

1. 원소의 개수가 30인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 18$ 일 때, $n(A^c \cap B^c)$ 의 값은?

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

$$n(A \cup B) = 18$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 30 - 18 = 12$$

2. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$

② $A < B < C$

③ $A < C < B$

④ $B < A < C$

⑤ $B < C < A$

해설

$$\begin{aligned} \text{i) } A - B &= (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2) \\ &= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0 \\ \therefore A &> B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } B - C &= (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1) \\ &= 1 - \sqrt{3} < 0 \\ \therefore B &< C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } C - A &= (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0 \\ \therefore C &> A \end{aligned}$$

따라서 $B < A < C$

3. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수 함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100

② 50

③ 38

④ 20

⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,

$$f(1) = f(3) = \dots = f(19) = 2$$

$$\therefore f(1) + f(3) + \dots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$$

5. 다음 함수 $y = 2x - 5$ ($x \geq 1$) 의 역함수를 구하면?

① $y = 2x - 5$

② $y = 2x - 5(x \geq 1)$

③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}(x \geq 1)$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}(x \geq -3)$

해설

$$y = 2x - 5(x \geq 1, y \geq -3) \rightarrow x = 2y - 5$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

여기서 $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ 이므로 $x \geq -3$ 이 된다.

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} (x \geq -3)$$

6. 수열 $1, -3, 5, -7, 9, \dots$ 의 100 번째 항은?

① -199

② -99

③ -59

④ 99

⑤ 199

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 수열의 일반항은

$$a_n = (-1)^{n-1} \times (2n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = (-1)^{99} \times 199 = -199$$

7. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}$ 를 Σ 를 이용하여 나타내면?

① $\sum_{k=1}^{99} a_k$

② $\sum_{k=1}^{99} a_{2k-1}$

③ $\sum_{k=1}^{99} a_{2k+1}$

④ $\sum_{k=1}^{50} a_k$

⑤ $\sum_{k=1}^{50} a_{2k-1}$

해설

① $\sum_{k=1}^{99} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99}$

② $\sum_{k=1}^{99} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{197}$

③ $\sum_{k=1}^{99} a_{2k+1} = a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{199}$

④ $\sum_{k=1}^{50} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{50}$

⑤ $\sum_{k=1}^{50} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}$

8. 두 집합 $A = \{3, 4, x\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, x 의 값이 될 수 없는 것은?

① 1

② 2

③ 6

④ 10

⑤ 12

해설

집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 포함 되어야 하므로 x 는 12 의 약수가 되어야 한다. 따라서 12 의 약수가 아닌 10 은 x 의 값이 될 수 없다.

9. 두 집합 $A = \{1, 2, a+1\}$, $B = \{1, b, 7\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$A = B \text{ 이므로 } b = 2, a + 1 = 7, a = 6$$

$$\therefore a + b = 8$$

10. $n(A) = 16$, $n(B) = 10$, $n(A \cup B) = 24$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 16 + 10 - 24 = 2\end{aligned}$$

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B$ 와 다른 집합은?

① $(A \cup B) - B$

② $A - (A \cap B)$

③ $A \cap B^c$

④ $B^c - A^c$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap B)$

해설

$A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = B^c - A^c$ 이므로
⑤이다.

12. 두 집합 $n(A) = 15, n(B) = 11, n(A \cap B) = 6$ 일 때, $n(A - B)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 15 - 6 = 9$$

13. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.

$$\therefore 4^3 = 64$$

$$\therefore a + b = 64$$

14. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 3, g^{-1}(1) = 4$ 일 때, $f^{-1}(3) + g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2) = 3$ 에서 $f^{-1}(3) = 2$ 이고

$g^{-1}(1) = 4$ 에서 $g(4) = 1$ 이므로

$$f^{-1}(3) + g(4) = 2 + 1 = 3$$

15. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 4} \times \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4x + 3} \div \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 4}$ 을 간단히 하면 ?

① $\frac{4}{x-3}$

② $\frac{1}{x+4}$

③ $\frac{2}{x+2}$

④ 1

⑤ 0

해설

(주어진 식)

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$\div \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$\times \frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(2x+1)} = 1$$

16. $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x = a$, $y = b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 2$

해설

$$\begin{aligned}y &= \frac{3x+1}{2x-1} \\&= \frac{3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} \\&= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad a + b = 2$$

17. 함수 $y = -\frac{1}{x} + 1$ 의 역함수를 바르게 구한 것은?

① $y = \frac{1}{1-x}$

② $y = \frac{1}{1+x}$

③ $y = \frac{x}{1-x}$

④ $y = \frac{1+x}{x}$

⑤ $y = \frac{x}{1+x}$

해설

$$y = -\frac{1}{x} + 1 \text{ 에서 } \frac{1}{x} = 1 - y$$

$$1 = (1 - y)x, x = \frac{1}{1 - y}$$

$$\therefore y = \frac{1}{1 - x}$$

18. 다음 수열에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.

1, 2, 4, 7, 11, a , b , ...

▶ 답:

▷ 정답: 38

해설

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22

∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨

1 2 3 4 5 6

∴ $a = 16$, $b = 22$

$a + b = 16 + 22 = 38$

19. 1이 아닌 양수 p 와 세 양수 x, y, z 에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$ 가 성립할 때, xyz 의 값은?

① $\frac{1}{p^3}$

② $\frac{1}{2p}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $2p$

⑤ p^2

해설

$$\begin{aligned} & \log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z \\ &= \log_p x + \frac{2}{2}\log_p y + \frac{3}{3}\log_p z \\ &= \log_p xyz = -3 \\ \therefore xyz &= p^{-3} = \frac{1}{p^3} \end{aligned}$$

20. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A , B 에 대하여 a 의 값을 모두 구하여라.

$$A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$$

$$B = \{1, 2, a\}$$

$$B \subset A$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 12

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$B \subset A \text{ 이므로 } a \in A$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 4 \text{ 또는 } a = 6 \text{ 또는 } a = 12$$

21. 두 집합 $A = \{1, 2, a + 1\}$ $B = \{3, 5, a\}$ 에서 $A \cap B = \{2, 3\}$ 일 때, $A - B$ 는?

① \emptyset

② $\{1\}$

③ $\{5\}$

④ $\{1, 5\}$

⑤ $\{1, 2, 3\}$

해설

$A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 $a + 1 = 3, a = 2$

따라서, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 5\}$ 이므로

$A - B = \{1\}$ 이다.

22. 직각삼각형의 세 변의 길이 $a, b, 3$ 이 등차수열을 이룬다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, $a < b < 3$)

① $\frac{21}{5}$

② $\frac{22}{5}$

③ $\frac{23}{5}$

④ $\frac{24}{5}$

⑤ 5

해설

$$a^2 + b^2 = 9$$

$$\frac{a+3}{2} = b$$

$$a^2 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2 = 9$$

$$a^2 + \frac{a^2 + 6a + 9}{4} = 9$$

$$4a^2 + a^2 + 6a + 9 - 36 = 0$$

$$5a^2 + 6a - 27 = 0$$

$$(a+3)(5a-9) = 0$$

$$a = \frac{9}{5} \quad (a > 0)$$

$$b = \frac{a+3}{2} = \frac{\frac{9}{5} + 3}{2} = \frac{9+15}{5 \cdot 2}$$

$$= \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore a + b = \frac{9}{5} + \frac{12}{5} = \frac{21}{5}$$

23. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = \log_8 4^n$ 으로 나타내어지는 수열의 일반항 a_n 은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{n}{2}$

④ $\frac{n}{3}$

⑤ $\frac{2}{3}n$

해설

$$S_n = \log_8 4^n = \log_{2^3} 2^{2n} = \frac{2n}{3}$$

$$S_{n-1} = \frac{2(n-1)}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ &= \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{또 } a_1 = \log_8 4 = \frac{2}{3} \text{ 이므로 } a_n = \frac{2}{3}$$

24. $(7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$ 의 값은?

① 2

② 6

③ 10

④ 14

⑤ 18

해설

$$(7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$$

$$\{(7^{\frac{1}{4}})^2 - (5^{\frac{1}{4}})^2\} (7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$$

$$= (7^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) = (7^{\frac{1}{2}})^2 - (5^{\frac{1}{2}})^2$$

$$= 7 - 5 = 2$$

25. 1보다 큰 정수 a, b, c 에 대하여 $p = a^{12} = b^4 = (abc)^2$ 일 때, $\log_c p$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ 3

④ 6

⑤ 9

해설

$$\text{주어진 식에서 } \log_p a = \frac{1}{12}, \log_p b = \frac{1}{4}, \log_p abc = \frac{1}{2}$$

$$\log_c p = x \text{라 하면 } \log_p c = \frac{1}{x} \text{이고,}$$

$$\log_p abc = \log_p a + \log_p b + \log_p c \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x}, \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = 6$$

$$\therefore \log_c p = 6$$

26. 세 수 $3\log_3 3$, $\log_2 3$, $2\log_2 4$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $2\log_2 4 < 3\log_3 3 < \log_2 3$ ② $\log_2 3 < 2\log_2 4 < 3\log_3 3$

③ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$ ④ $3\log_3 3 < 2\log_2 4 < \log_2 3$

⑤ $3\log_3 3 < \log_2 3 < 2\log_2 4$

해설

$$3\log_3 3 = 3$$

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \quad \therefore 1 < \log_2 3 < 2$$

$$2\log_2 4 = 4$$

$$\therefore \log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$$

27. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a \sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \leq A < 3$

② $\frac{3}{2} < A \leq 3$

③ $2\sqrt{2} \leq A < 3\sqrt{3}$

④ $3 \leq A < \frac{9}{2}$

⑤ $3 < A \leq \frac{9}{2}$

해설

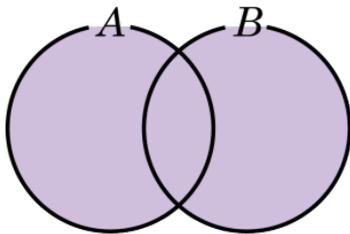
$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log a < 3$

$$\log a \sqrt{a} = \log a^{3/2} = \frac{3}{2} \log a$$

$$\frac{3}{2} \times 2 \leq \frac{3}{2} \log a < \frac{3}{2} \times 3$$

$$\therefore 3 \leq A < \frac{9}{2}$$

28. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 24\}$, $B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.

원소나열법으로 고쳐보면,

$B = \{4, 8, 16, 32, 64, 96\}$ 이 된다.

색칠한 부분의 원소는 $\{1, 2, 4, 8, 16, 24, 32, 64, 96\}$ 이다.

이때, 가장 큰 원소는 96 이다.

29. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $X \cap A = X$, $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$$A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}, B = \{3, 5, 7\}$$

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 5\},$$

$$X \cap A = X \text{이므로 } X \subset A,$$

$$X \cup (A \cap B) = X \text{이므로 } (A \cap B) \subset X$$

$$\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로

$$2^{5-2} = 2^3 = 8 \text{이다.}$$

30. A, B 두 자동차의 연비(연료 1l로 갈 수 있는 거리 : km/l)의 비는 5 : 6 이고, 연료 탱크의 용량의 비는 4 : 3 이다. 이 두 대의 자동차에 연료를 가득 채우고 120 km 를 달린 후의 A, B 두 차에 남아 있는 연료의 비는 7 : 5 이었다. A 자동차가 연료를 가득 채우고 갈 수 있는 총거리는?

① 300 km

② 350 km

③ 400 km

④ 450 km

⑤ 500 km

해설

	A	B
연비(km/l)	$5k$	$6k$
연료 탱크의 용량(l)	$4m$	$3m$
소요된 연료(l)	$\frac{120}{5k}$	$\frac{120}{6k}$

$$\left(4m - \frac{120}{5k}\right) : \left(3m - \frac{120}{6k}\right) = 7 : 5$$

$$\therefore mk = 20$$

따라서, A 자동차가 연료 4m 으로 갈 수 있는 총거리는

$$5k \times 4m = 20mk = 400(\text{km})$$

31. $x = \sqrt{7 - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값을 구하면?

① 36

② 98

③ 448

④ 724

⑤ 1024

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{7 - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore x + \frac{1}{x} &= 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4\end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{1^2}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{1^3}{x} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 64 - 12 = 52\end{aligned}$$

따라서, $x^5 + \frac{1}{x^5}$

$$\begin{aligned}&= \left(x^2 + \frac{1^2}{x}\right) \left(x^3 + \frac{1^3}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 14 \times 52 - 4 = 724\end{aligned}$$

32. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5이고, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$ 으로 나타내어진다. 이때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 140

해설

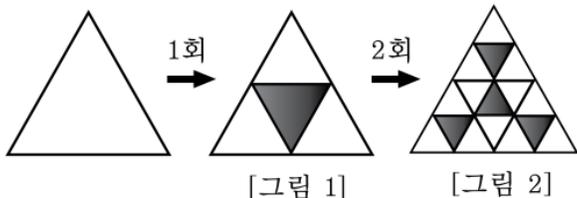
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n\{2 \cdot 5 + (n-1)4\}}{2} = n(2n+3)$$

$$\therefore b_n = \frac{n(2n+3)}{n} = 2n+3 \text{ (단, } n \neq 0)$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항은 $b_1 = 2 + 3 = 5$ 이고, 공차가 $b_2 - b_1 = 7 - 5 = 2$ 인 등차수열이다.

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10} = \frac{10(2 \cdot 5 + 9 \cdot 2)}{2} = 140$$

33. 앞면에는 흰색, 뒷면에는 검은색이 칠해진 정삼각형 모양의 종이가 있다. [그림1]과 같이 각 변의 중점을 잇는 선분을 경계로 잘라 그 중간에 삼각형을 뒤집어 놓으면 합동인 4개의 정삼각형 중 세 개는 흰색이고, 가운데 하나는 검은색이다. 이 4개의 삼각형을 뒤집어 처음과 같은 방법으로 시행하면 [그림2]와 같다. 이와 같은 시행을 계속해서 3회 하였을 때, 만들어진 삼각형 중에서 흰색인 삼각형의 개수는?



- ① 24 개 ② 36 개 ③ 48 개 ④ 60 개 ⑤ 80 개

해설

n 번 시행 후 흰색, 검은색의 삼각형의 개수를 각각 a_n, b_n 이라 하면 $a_n + b_n = 4^n$ 이므로 $a_{n+1} = 3a_n + b_n = 3a_n + (4^n - a_n)$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 4^n$$

$$\therefore a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 36$$