1. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha,\ \beta$의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

2. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\frac{12}{n}$ ② $\frac{8}{n}$ ③ $\frac{6}{n}$ ④ $\frac{3}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots$

$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \cdots$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$\therefore\ a_n = \frac{12}{n}$

3. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, a_4+a_7의 값은?

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\frac{10(2a+9d)}{2}=120 \quad \therefore\ 2a+9d=24$

$a_4+a_7=(a+3d)+(a+6d)=2a+9d=24$

4. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \mathrm{A}$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = \mathrm{B}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \mathrm{A} + \mathrm{B}$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \mathrm{A} - \mathrm{B}$

③ $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\mathrm{A}$(단, c는 상수)

④ $\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = \mathrm{B} - 1$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}(a_k + c) = \mathrm{A} + cn$(단, c는 상수)

해설

$\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} b_k = \mathrm{B}$

따라서 , ④가 옳지 않다.

5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{n}{n+1}$ ③ $\frac{2n}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

6. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

① 3　② $\sqrt{3}$　③ 5　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$

7. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64}$

$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12$

8. $\log_8 3 = p,\ \log_3 5 = q$일 때, $\log_{10} 5$를 $p,\ q$로 나타내면?

① pq ② $\dfrac{p-q}{3}$ ③ $\dfrac{2pq}{p+q}$

④ $\dfrac{3pq}{1+3pq}$ ⑤ $\sqrt{p^2+q^2}$

해설

$\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \dfrac{1}{3}\log_2 3 = p$

$\therefore \log_2 3 = 3p$

$\log_{10} 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 10} = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 5 + \log_3 2} = \dfrac{q}{q+\frac{1}{3p}}$

$= \dfrac{3pq}{3pq+1}$

9. a, x, y가 양의 실수이고 $A = \log_a \dfrac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \dfrac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \dfrac{1}{x^5}$　② $\log_a \dfrac{1}{y^5}$　③ $\log_a \dfrac{1}{xy}$

④ $\log_a \dfrac{x^5}{y^5}$　⑤ $\log_a \dfrac{x^5}{y^7}$

해설

$3A + 2B$
$= 3(2\log_a x - 3\log_a y) + 2(2\log_a y - 3\log_a x)$
$= -5\log_a y = \log_a \frac{1}{y^5}$

10. 함수 $f(x)$에 대하여 $f(20^x) = \frac{1}{x} - \log_3 5$일 때, $f(3)$의 값은?

① 1　　② 3　　③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$　　⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$20^x = 3$이라 하면 $x = \log_{20} 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

11. 다음 표에 적당한 수를 넣어 각 행과 각 열이 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 12개의 빈 칸에 들어갈 수들의 총합을 구하여라.

1			7
10			34

▶ 답 :

▷ 정답 : 156

해설

다음 표와 같이 빈 칸에 문자를 대응시키자.

1	a	b	7
c	d	e	f
g	h	i	j
10	k	l	34

각 행과 열이 각각 등차수열을 이루므로

$a+b=1+7=8$

$k+l=10+34=44$

$c+g=1+10=11$

$f+j=7+34=41$

또, $(d+e)+(h+i)=(c+f)+(g+j)$

$=(c+g)+(f+j)=11+41=52$

이므로 구하는 총합은

$8+44+11+41+52=156$

12. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 등차수열 $\{2a_n\}$, $\{3a_n+2\}$의 공차의 합은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로
$a_{n+1}-a_n=2$
수열 $\{2a_n\}$의 공차를 d_1이라 하면
$d_1=2a_{n+1}-2a_n=2(a_{n+1}-a_n)=2\times2=4$
수열 $\{3a_n+2\}$의 공차를 d_2이라 하면
$d_2=(3a_{n+1}+2)-(3a_n+2)=3(a_{n+1}-a_n)=3\times2=6$
$\therefore\ d_1+d_2=4+6=10$

13. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1)\times(-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

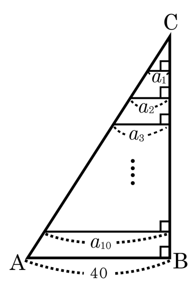
$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2\cdot\dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2}(\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

14. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1+a_{10}=40,\ a_2+a_9=40, \cdots, a_5+a_6=40$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=40\times5=200$

15. 2와 162 사이에 세 양수 a, b, c를 넣어 $2, a, b, c, 162$가 이 순서대로 등비수열을 이루게 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$b^2 = 2 \times 162$
$b = 18 \ \ (\because b > 0)$
$2, a, 18, c, 162$가 등비수열을 이루므로
$a^2 = 2 \times 18$
$a = 6 \ \ (\because a > 0)$
$c^2 = 18 \times 162$
$c = 54$
$\therefore a + b = c = 6 + 18 + 54 = 78$

16. 서로 다른 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열을 이루고 있다. b와 c 사이에 두 수를 넣어 5개의 수가 등차수열을 이루도록 하였다. 이때, $\dfrac{b+c}{a}$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

b와 c 사이에 두 수를 넣어 만들어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$b=a+d,\ c=a+4d \cdots$ ㉠

세 수 $a,\ b,\ c$가 등비수열을 이루므로

$(a+d)^2=a(a+4d)$

$a^2+2ad+d^2=a^2+4ad$

$\therefore\ d=2a$

㉠에서 $b=3a,\ c=9a$

$\therefore\ \dfrac{b+c}{a}=\dfrac{3a+9a}{a}=12$

17. 다항식 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2014}$ 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는?

① $2^{2014}-1$ ② $2^{2014}+1$ ③ $2^{2015}-1$
④ $2^{2015}+1$ ⑤ 2^{2015}

해설

$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2014}$ 을 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이므로

$f(2) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2014} = \dfrac{2^{2015}-1}{2-1} = 2^{2015}-1$

18. 수열 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, $\cdots$,에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면
1/ 1, 2/1, 2, 3/ 1, 2, 3, 4/$\cdots$
1군은 1
2군은 1, 2
3군은 1, 2, 3이므로
7군은 1, 2, 3, $\cdots$, 7
(6까지의 항의 총수)$= 1 + 2 + \cdots + 6 = 21$
$21 + 7 = 28$(번째 항)

19. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ + & a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ \hline & a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \\ & \quad = -1 + \dfrac{(n-1)\cdot n}{2} \end{array}$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= -1 + 45 = 44$$

20. $a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n \geq 1)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$ 의 값은?

① $2^{10} + 6$　　② $2^{10} + 0$　　③ $2^{10} + 18$
④ $2^{11} + 9$　　⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$꼴로 변형하면
$a_{n+2} - (1+P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$
즉, $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$
이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$이고 공비가 2인 등비수열이다.
$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$
$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$
$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \dfrac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10$
$= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18$

21. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$이 의미를 갖기 위한 정수 k의 개수는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$\log_a b$에서 $a > 0,\ a \neq 1, b > 0$

(i) $(k-2)^2 > 0 \rightarrow k \neq 2$

(ii) $(k-2)^2 \neq 1 \rightarrow k \neq 3,\ 1$

(ii) $kx^2 + kx + 1 > 0$

$\rightarrow k = 0$ 또는 $k > 0$일때, $k^2 - 4k < 0$

$\therefore\ 0 < k < 4$

따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k는 0

22. $\log_{10}(1+1)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준식) $=\log_{10}2+\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{10}\frac{100}{99}$

$=\log_{10}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$

$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2$

23. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $12x$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$로 치환하면, $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5(\because t > 0)$

$\therefore\ 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{1-0.3}{0.3} = \dfrac{7}{3}$

따라서 구하는 값은 $12x = 28$

24. 다음과 같이 4와 109 사이에 k 개의 수를 나열하여 항의 개수가 $k+2$ 인 등차수열을 만들려고 한다. 공차가 1이 아닌 최소의 자연수일 때, k 의 값은?

$$4,\ \underbrace{\square,\ \square,\ \cdots,\ \square}_{k\text{개}},\ 109$$

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

해설

$a_1 = 4$

$a_{k+2} = 4 + (k+1) \times d = 109$

$4 + (k+1) \times d = 109$

$(k+1) \times d = 105$

$(k+1) \times d = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$\therefore d = 3,\ k+1 = 35 \quad \therefore k = 34$

25. 다음과 같이 규칙적으로 나열된 55개의 분수가 있다.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{4}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{4}{2^3},\ \frac{4^2}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{4}{2^4},\ \frac{4^2}{2^4},\ \frac{4^3}{2^4}, \cdots \frac{4^9}{2^{10}}$$

위의 55개의 수를 모두 곱한 값을 P라 할 때, $\log_2 P$의 값은?

① -55　② -25　③ 0　④ 25　⑤ 55

해설

주어진 55개의 분수에서 분모들의 곱을 a, 분자들의 곱을 b라 하면

$a = 2 \times (2^2)^2 \times (2^3)^2 \times \cdots \times (2^{10})^{10}$

$= 2^{1+2^2+3^2+\cdots+10^2} = 2^{\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}} = 2^{385}$

$b = 4^{1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+9)}$

$= 4^{\sum_{n=1}^{9}(1+2+\cdots+n)}$

$= 4^{\sum_{n=1}^{9}(1+2+\cdots+n)}$

$= 4^{\frac{1}{2}\left(\frac{9\cdot 10\cdot 19)}{6}+\frac{9\cdot 10}{2}\right)} = 4^{165} = 2^{330}$

따라서 $P = \dfrac{2^{330}}{2^{385}} = 2^{-55}$이므로 구하는 값은

$\log_2 P = \log_2 2^{-55} = -55$

26. 자연수로 이루어진 순서쌍의 수열 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (1,\ 4),$ $(2,\ 3),\ (3,\ 2)\ (4,\ 1),\ (1,\ 5),\cdots$ 에서 두 수가 모두 한 자리의 자연수로 이루어진 순서쌍의 총 개수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 81

해설

주어진 수열을 순서쌍의 두 수의 합이 같은 것 끼리 군을 묶으면
$(1,\ 1)|\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)|\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)|,\cdots$
이 때, 각 군에서 모든 항의 순서쌍의 두 수가 한 자리의 자연수인 군의 수를 구하기 위해 두수의 합이 10이 되는 것부터 세면
$1+2+3+\cdots+10=\dfrac{9\cdot 10}{2}=45\cdots$㉠
두 수의 합이 11인 순서쌍의 개수는 10이고, 이중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍은$(1,\ 10),\ (10,\ 1)$을 제외한 8개다.
같은 방법으로 두 수의 합이 12인 순서쌍의 개수는 11이고, 이중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍은 $11-4=7$(개)이다.
두 수의 합이 18로 이루어진 순서쌍 중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍의 개수는 $17-16=1$(즉, $(9,\ 9)$)이므로 모두
$(10-2)+(11-4)+(12-6)+(13-8)+(14-10)$
$+(15-12)+(16-14)+(17-16)$
$=8+7+6+\cdots+1=\dfrac{8\cdot 9}{2}=36\cdots$㉡
따라서, ㉠, ㉡에서 두 수가 모두 한자리의 자연수로 이루어진 순서쌍의 총 개수는 81이다.

27. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_8 - a_7$의 값은?

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{64}$ ③ $\frac{1}{128}$ ④ $\frac{1}{256}$ ⑤ $\frac{1}{512}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

$(a_{n+1} - \alpha) = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$

$-\frac{1}{2}\alpha + \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 2$

$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$

$\therefore \{a_n - 2\}$는 초항이 -1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열

$\therefore a_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$

$\therefore a_8 - a_7 = -\left(\frac{1}{2}\right)^7 + 2 - \left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 2\right\}$

$= -\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

28. $a > 0$이고 $t = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})$일 때, $(t + \sqrt{t^2+1})^3$을 a에 관한 식으로 나타내면?

① a^2 ② a ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\sqrt{a}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}}$

해설

$$t + \sqrt{t^2+1} = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{2}{3}} - 2 + a^{-\frac{2}{3}}) + 1}$$
$$= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + 2 + a^{-\frac{1}{3}})^2}$$
$$= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^2}$$
$$= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}) = a^{\frac{1}{3}}$$
$$\therefore \quad (t + \sqrt{t^2+1})^3 = (a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

29. $a = \sqrt[3]{8+4\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{8-4\sqrt{2}}$ 이고 $\log_3(a^3+b^3)$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

해설

$a^3 + b^3 = (8+4\sqrt{2}) + (8-4\sqrt{2}) = 16$

$\log_3(a^3+b^3) = \log_3 16$

그런데, $\log_3 16$ 의 정수부분이 2이므로

$\alpha = \log_3 16 - 2 = \log_3 \frac{16}{9}$

$\therefore\ 3^\alpha = \frac{16}{9}$

30. 1보다 큰 양수 a의 상용로그의 정수 부분을 x라 할 때, 다음 식이 성립한다.

$$-x+\log a=\frac{x^2-2x-2}{6}$$

이때, $6\log a$의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$-x+\log a$의 값이 $\log a$의 소수 부분이므로

$0 \le \dfrac{x^2-2x-2}{6} < 1$

$0 \le \dfrac{x^2-2x-2}{6}$에서 $x^2-2x-2 \ge 0$

$\therefore\ x \ge 1+\sqrt{3}\ (\because x>0) \cdots$ ㉠

$\dfrac{x^2-2x-2}{6} < 1$에서 $x^2-2x-8<0$

$\therefore\ -2<x<4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $1+\sqrt{3} \le x < 4$

그런데 x는 정수이므로 $x=3$

$\therefore\ \dfrac{x^2-2x-2}{6}=\dfrac{1}{6}$

$-x+\log a=\dfrac{1}{6}$이므로 $\log a=\dfrac{1}{6}+3=\dfrac{19}{6}$

$\therefore\ 6\log a=6\times\dfrac{19}{6}=19$

31. A, B두 그릇에 농도가 각각 10%, 20%인 소금물이 각각 $100\mathrm{g}$씩 들어 있다. A 그릇의 소금물 $25\mathrm{g}$을 덜어 B 그릇에 담아 잘 섞은 다음 B 그릇의 소금물 $25\mathrm{g}$을 다시 덜어 A 그릇에 담아 잘 섞는다. 이와 같은 작업을 n회 시행하였더니 두 그릇의 소금물의 농도의 차가 5%이하가 되었을 때, 자연수 n의 최솟값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

n회 시행 후 두 그릇에 들어 있는 소금의 양은 $100\mathrm{g}$으로 동일하므로 소금의 양이 바로 농도가 된다.
시행 전 A, B두 그릇에 들어있는 소금의 양은 각각
$a_0 = 10\mathrm{g}$, $\mathrm{b}_0 = 20\mathrm{g}$
n회 시행 후 각 그릇에 남아 있는 소금의 양을 각각 a_n, b_n이라 하면

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \left(\frac{1}{4}a_n + b_n\right) \times \frac{1}{5}$$

즉, $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n \cdots$ ㉠

한편, 매 시행 후 두 그릇에 들어 있는 소금의 양의 합은 변함이 없으므로

$$a_0 + b_0 = \cdots = a_n + b_n = a_{n+1} + b_{n+1}$$

$\therefore\ b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{4}{5}b_n \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠에서 $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3}{5}(b_n - a_n)$

한편, $a_1 = \frac{4}{5}a_0 + \frac{1}{5}b_0 = \frac{4}{5}\cdot 10 + \frac{1}{5}\cdot 20 = 12$

$b_1 = \frac{1}{5}a_0 + \frac{4}{5}b_0 = \frac{1}{5}\cdot 10 + \frac{4}{5}\cdot 20 = 18$

$$\therefore\ b_n - a_n = (b_1 - a_1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = 6\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n = 10\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

소금물의 농도의 차가 5% 이하가 되려면 소금의 양의 차가 0.05 이하가 되어야 하므로

$$10\left(\frac{3}{5}\right)^n \le 0.05,\quad \left(\frac{3}{5}\right)^n \le \frac{1}{200}$$

양변에 로그를 취하면

$$n(\log 3 - \log 5) \le -\log 2 - 2$$

$$n \ge \frac{-\log 2 - 2}{\log 3 - \log 5} = \frac{-0.3010 - 2}{0.4771 - 0.699} = 10.37(\because \log 5 = 1 - \log 2)$$

따라서 만족하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

32. 다음 식을 계산하면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$$\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\left[\sqrt[3]{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{125}\right]$$

① 405　② 415　③ 425　④ 451　⑤ 462

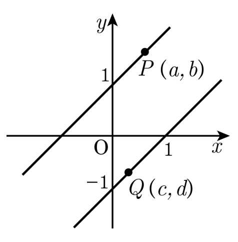
해설

$1 \le n < 8$이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=1$
$8 \le n < 27$이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=2$
$27 \le n < 64$이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=3$
$64 \le n < 125$이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=4$
$n=125$이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=5$

$\therefore \left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\left[\sqrt[3]{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{125}\right]$

$=1\times 7+2\times 19+3\times 37+4\times 61+5=405$

33. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$가 각각 두 직선 m, n 위를 움직인다.
$2^b = 12 \cdot 2^d$이 성립할 때, $\dfrac{2^a + 2^b}{2^c + 2^d}$의 값은?



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두 직선 m, n의 방정식은 각각 $y = x + 1$, $y = x - 1$이므로
$b = a + 1$, $d = c - 1$
또, $2^b = 12 \cdot 2^d$에서 $2^{b-d} = 2^{a-c+2} = 4 \cdot a^{a-c} = 12$
$\therefore\ 2^{a-c} = 3$
따라서, $2^a + 2^b = 2^a + 2^{a+1} = 3 \cdot 2^a$
$2^c + 2^d = 2^c + 2^{c-1} = \dfrac{3}{2} \cdot 2^c$이므로
$$\frac{2^a + 2^b}{2^c + 2^d} = \frac{3 \cdot 2^a}{\frac{3}{2} \cdot 2^c} = 2 \cdot 2^{a-c} = 2 \cdot 3 = 6$$