

1. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4$ (참)

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5 \times 5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$ (참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$ (참)

2. 16의 네제곱근 중 음수인 것을 a , -27 의 세제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -12

② -6

③ 6

④ 12

⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은

$$-\sqrt[4]{16} = -2 \quad \therefore a = -2$$

-27 의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3 = -27, \quad (x+3)(x^2-3x+9) = 0$$

이때, -27 의 세제곱근 중 실수인 것은 -3 이다.

$$\therefore b = -3$$

$$\therefore ab = (-2) \times (-3) = 6$$

3. $\sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$ 을 간단히 하면?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \sqrt{\sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \frac{\sqrt{5 - 3}}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{8}{2}} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{4} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

4. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a \sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

$$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$$

$$20 = k + 3$$

$$k = 17$$

5. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{3}{2}}$ 을 간단히 하면?

① $a \sqrt[3]{a}$

② $a \sqrt{a}$

③ $\frac{1}{a \sqrt[3]{a^2}}$

④ $\frac{1}{a \sqrt{a}}$

⑤ $\frac{1}{a \sqrt[3]{a}}$

해설

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} &= a^{\frac{3-2-9}{6}} \\ &= a^{-\frac{8}{6}} = a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{a \sqrt[3]{a}} \end{aligned}$$

6. $(3 - \sqrt{2})^{-1} \times (11 + 6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}} = a$ 일 때, $\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3 - \sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{11 + 2\sqrt{18}}} \\ &= \frac{1}{(3 - \sqrt{2}) \times (3 + \sqrt{2})} = \frac{1}{7} \\ \therefore \frac{1}{a} &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

7. $a = 4^3$ 일 때, 8^9 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① a^2

② $a^{\frac{5}{2}}$

③ a^3

④ $a^{\frac{7}{2}}$

⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

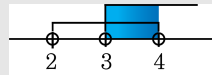
$$\begin{aligned} a &= 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \therefore 2 = a^{\frac{1}{6}} \\ 8^9 &= (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

8. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 이 정의되기 위한 실수 x 의 값의 범위를 구하면?

- ① $3 < x < 4$ ② $5 < x < 7$ ③ $-1 < x < 3$
④ $x > 0$ ⑤ $2 < x < 5$

해설

$x-3 \neq 1, x-3 > 0,$
 $-x^2+6x-8 > 0$ 이므로
 $x \neq 4, x > 3$
 $x^2-6x+8 < 0$
 $2 < x < 4$



$\therefore 3 < x < 4$

9. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64} \\ &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12\end{aligned}$$

10. $\log_3 10$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{100}{9}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

해설

$\log_3 10 = 2 + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) 이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3 \frac{10}{9}$ 이 된다.

따라서 $3^\alpha = 3^{\log_3 \frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$ 이다.

11. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 가 성립함을
 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= 1 \cdot 2 = 2$, (우변) $= (1 - 1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
 이므로 주어진 등식이 성립한다.
 (ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
 $= (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2$
 이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 을 더하면
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$
 $= (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$
 $= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$
 따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립
 한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k + 1$

③ (가) : $(k + 1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k + 1$

⑤ (가) : $(k + 1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k + 1$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
 $= (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2$
 이 식의 양변에 $\boxed{(k + 1) \cdot 2^{k+1}}$ 을 더하면
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(k + 1) \cdot 2^{k+1}}$
 $= (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k + 1) \cdot 2^{k+1}}$
 $= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$
 따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립
 한다.

12. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - \text{㉡} > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

㉠ $n = 1, k^2$

㉡ $n = 1, (k+1)^2$

㉢ $n = 5, (k-1)^2$

㉣ $n = 5, k^2$

㉤ $n = 5, (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore$ ㉠ $n = 5, \text{㉡} (k+1)^2$

13. 세 수 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$ 를 작은 것부터 차례로 나열한 것은?

- ① $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$ ② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{34}$ ③ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$
④ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$ ⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

해설

$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{4}{12}}$, $\sqrt[4]{10} = 10^{\frac{3}{12}}$, $\sqrt[6]{34} = 34^{\frac{2}{12}}$
이므로 세 수를 12제곱하면
 $7^4 = 2401$, $10^3 = 1000$, $34^2 = 1156$
따라서, 작은 것부터 차례로 나열하면
 $\therefore \sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

14. $x = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\sqrt{x^2 + 4}$ 의 값은?

① $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

② $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

③ $\sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

④ $\sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

⑤ $\sqrt[8]{2} + \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$

해설

$$x^2 + 4 = 2^{\frac{1}{4}} + 2 + 2^{-\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + 4} = 2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2} + \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$$

15. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, $a + a^{-1}$ 의 값을 구하여라.(단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^2$

$a + a^{-1} + 2 = 16$

$\therefore a + a^{-1} = 14$

16. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

17. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$ 이므로

$$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$$

따라서, $a = 4c, b = 2c$

a, b, c 의 최대공약수가 3이므로

$$c = 3, a = 12, b = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$$

18. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2 + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & \log_{10} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99}\right) \\ &= \log_{10} \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \log_{10} 100 = 2 \end{aligned}$$

19. $\log_2 \sqrt{7 + \sqrt{24}}$ 의 소수 부분을 x 라 할때, 2^{x+1} 의 값을 구하면?

① $\sqrt{3} + 1$

② $\sqrt{5} + 1$

③ $\sqrt{6} + 1$

④ $\sqrt{7} + 1$

⑤ $2\sqrt{2} + 1$

해설

$$\log_2 \sqrt{7 + \sqrt{24}}$$

$$= \log_2 \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$$

$$= \log_2 (\sqrt{6} + 1)$$

$$= \log_2 (3 \times \times \times)$$

$$= 1. \times \times \times$$

$$\text{따라서, } x = \log_2 (\sqrt{6} + 1) - 1$$

$$2^{x+1} = 2^{\log_2 (\sqrt{6} + 1)} = \sqrt{6} + 1$$

20. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면
 $\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$
 $(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$
 $a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$
 $a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$
 $(a+10b)(a-12b) = 0$
 $\therefore a = -10b$ 또는 $a = 12b$
이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0$, $2b > 0$, $62b-a > 0$ 이므로
 $a > 0$, $b > 0$
따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

21. 퇴직금으로 받은 2억 원을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액을 연금형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 20년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은?(단, $1.05^{20} = 2.6$, 연이율 5%, 1년마다 복리로 계산한다.)
- ① 1625만원 ② 1734만원 ③ 2085만원
- ④ 2480만원 ⑤ 2600만원

해설

할부 계산과 마찬가지로 계산 시점은 20년 후 마지막 수령년도를 기준으로 계산한다.

매년 지급받을 연금을 a 만원이라 하면

$$20000 \times 1.05^{20} = \frac{a(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$20000 \times 2.6 = \frac{a(2.6 - 1)}{0.05}$$

$$\therefore a = \frac{20000 \times 2.6 \times 0.05}{1.6} = 1625(\text{만원})$$

22. 수열 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \sqrt{5-2\sqrt{6}}, \sqrt{7-2\sqrt{2}}, \dots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 10 일 때, n 의 값은?

- ① 116
- ② 117
- ③ 118
- ④ 119
- ⑤ 120

해설

$$a_1 = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$
$$a_2 = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$a_3 = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$
$$\text{따라서 } a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
$$S_n = \sqrt{n+1}-1$$
$$\sqrt{n+1}-1 = 10$$
$$\sqrt{n+1} = 11$$
$$n+1 = 121$$
$$n = 120$$

23. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{n}{n+1}$ ② $\frac{2n}{n+1}$ ③ $\frac{3n}{n+1}$ ④ $\frac{4n}{n+1}$ ⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1} \end{aligned}$$

24. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n - 1)(2n + 1) = 0$ 의 두근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은?

- ① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= -4 \\ \alpha_n \beta_n &= -(2n - 1)(2n + 1) \\ \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} &= \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-4}{-(2n - 1)(2n + 1)} \\ \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k} \right) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\alpha_k + \beta_k}{\alpha_k \beta_k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2k - 1)(2k + 1)} \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right) \\ &= \frac{4}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21} \end{aligned}$$

25. 이차방정식 $x^2 - 8x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. $\log_2 \left(\alpha + \frac{4}{\beta} \right) + \log_2 \left(\beta + \frac{4}{\alpha} \right) = k$ 일 때, 2^k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

두 근을 α, β 라 하면

$\alpha\beta = 1$ 이고,

$$\log_2 \left(\alpha + \frac{4}{\beta} \right) \left(\beta + \frac{4}{\alpha} \right)$$

$$= \log_2 \left(\alpha\beta + 4 + 4 + \frac{16}{\alpha\beta} \right)$$

$$= \log_2 25 = k$$

$$\therefore 2^k = 2^{\log_2 25} = 25$$