1. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2^2 = 4$(참)

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5 \times 5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$(참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$(참)

2. 16의 네제곱근 중 음수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, ab의 값은?

① -12 ② -6 ③ 6 ④ 12 ⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은

$-\sqrt[4]{16}=-2 \quad \therefore\ a=-2$

-27의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=-27, \quad (x+3)(x^2-3x+9)=0$

이때, -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.

$\therefore\ b=-3$

$\therefore\ ab=(-2)\times(-3)=6$

3. $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$을 간단히 하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5-3}}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{8}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{8}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{4}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= 2$$

4. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k의 값은? (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$

$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$

$20 = k + 3$

$k = 17$

5. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{3}{2}}$ 을 간단히 하면?

① $a\sqrt[3]{a}$ ② $a\sqrt{a}$ ③ $\dfrac{1}{a\sqrt[3]{a^2}}$

④ $\dfrac{1}{a\sqrt{a}}$ ⑤ $\dfrac{1}{a\sqrt[3]{a}}$

해설

$a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{3-2-9}{6}}$

$= a^{\frac{-8}{6}} = a^{\frac{-4}{3}} = \dfrac{1}{a\sqrt[3]{a}}$

6. $(3-\sqrt{2})^{-1}\times(11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=a$일 때, $\frac{1}{a}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$$a=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$$

$$=\frac{1}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{7}$$

7. $a=4^3$ 일 때, 8^9을 a에 관한 식으로 나타내면?

① a^2 ② $a^{\frac{5}{2}}$ ③ a^3 ④ $a^{\frac{7}{2}}$ ⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

$$a=4^3=(2^2)^3=2^6 \quad \therefore\ 2=a^{\frac{1}{6}}$$
$$8^9=(2^3)^9=2^{27}=(a^{\frac{1}{6}})^{27}=a^{\frac{27}{6}}=a^{\frac{9}{2}}$$

8. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 이 정의되기 위한 실수 x 의 값의 범위를 구하면?

① $3 < x < 4$ ② $5 < x < 7$ ③ $-1 < x < 3$

④ $x > 0$ ⑤ $2 < x < 5$

해설

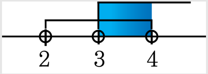
$x-3 \neq 1,\ x-3 > 0,$

$-x^2+6x-8 > 0$ 이므로

$x \neq 4,\ x > 3$

$x^2-6x+8 < 0$

$2 < x < 4$



$\therefore 3 < x < 4$

9. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64}$$

$$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12$$

10. $\log_3 10$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{100}{9}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

해설

$\log_3 10 = 2 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$ 이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3 \frac{10}{9}$ 이 된다.

따라서 $3^\alpha = 3^{\log_3 \frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$ 이다.

11. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
> 이므로 주어진 등식이 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
> $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
> 이 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$을 더하면
> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{\text{(가)}}$
> $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{\text{(가)}}$
> $= \boxed{\text{(나)}} \cdot 2^{k+2} + 2$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

해설

(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

12. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

> (i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
> (ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $2^k > k^2$
> 양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
> $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
> 따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$
② $n = 1,\ (k+1)^2$
③ $n = 5,\ (k-1)^2$
④ $n = 5,\ k^2$
⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
$\therefore$ ㉠ $n = 5$, ㉡ $(k+1)^2$

13. 세 수 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$를 작은 것부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[6]{34}$　② $\sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{34}$　③ $\sqrt[6]{34}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{34}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{7}$　⑤ $\sqrt[4]{10}, \sqrt[6]{34}, \sqrt[3]{7}$

해설

$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{4}{12}}$, $\sqrt[4]{10} = 10^{\frac{3}{12}}$, $\sqrt[6]{34} = 34^{\frac{2}{12}}$

이므로 세 수를 12제곱하면

$7^4 = 2401,\ 10^3 = 1000,\ 34^2 = 1156$

따라서, 작은 것부터 차례로 나열하면

$\therefore\ \sqrt[4]{10}, \sqrt[6]{34}, \sqrt[3]{7}$

14. $x = \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4}$ 의 값은?

① $\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　② $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\sqrt[4]{2} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

④ $\sqrt[4]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$　⑤ $\sqrt[8]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$

해설

$$x^2 + 4 = 2^{\frac{1}{4}} + 2 + 2^{-\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{x^2+4} = 2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2} + \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$$

15. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 일 때, $a+a^{-1}$ 의 값을 구하여라.(단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=4^2$

$a+a^{-1}+2=16$

$\therefore a+a^{-1}=14$

16. $2^x = 3$ 일 때, $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{3}{13}$ ③ $\dfrac{3}{10}$ ④ $\dfrac{3}{8}$ ⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} = \frac{2^x - \dfrac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \dfrac{1}{(2^x)^2}}$$

$$= \frac{3 - \dfrac{1}{3}}{3^2 - \dfrac{1}{3^2}} = \frac{\dfrac{8}{3}}{\dfrac{80}{9}} = \frac{3}{10}$$

17. 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$을 만족할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$이므로

$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$

따라서, $a = 4c,\ b = 2c$

$a,\ b,\ c$의 최대공약수가 3이므로

$c = 3,\ a = 12,\ b = 6$

$\therefore a+b+c = 12+6+3 = 21$

18. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\log_{10} 2 \cdot (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{99})$
$= \log_{10} \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}$
$= \log_{10} 100 = 2$

19. $\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$ 의 소수 부분을 x 라 할때, 2^{x+1} 의 값을 구하면?

① $\sqrt{3}+1$ ② $\sqrt{5}+1$ ③ $\sqrt{6}+1$

④ $\sqrt{7}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

해설

$\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$

$= \log_2 \sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$= \log_2(\sqrt{6}+1)$

$= \log_2(3.\times\times\times)$

$= 1.\times\times\times$

따라서, $x = \log_2(\sqrt{6}+1) - 1$

$2^{x+1} = 2^{\log_2(\sqrt{6}+1)} = \sqrt{+}1$

20. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$

$(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$

$a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$

$a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$

$(a+10b)(a-12b) = 0$

$\therefore\ a = -10b$ 또는 $a = 12b$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0,\ 2b > 0,\ 62b-a > 0$ 이므로

$a > 0,\ b > 0$

따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

21. 퇴직금으로 받은 2억 원을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액을 연금형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 20년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은?(단, $1.05^{20} = 2.6$, 연이율 5%, 1년마다 복리로 계산한다.)

① 1625만원 ② 1734만원 ③ 2085만원
④ 2480만원 ⑤ 2600만원

해설

할부 계산과 마찬가지로 계산 시점은 20년 후 마지막 수령년도를 기준으로 계산한다.
매년 지급받을 연금을 a만원이라 하면

$$20000 \times 1.05^{20} = \frac{a(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$20000 \times 2.6 = \frac{a(2.6 - 1)}{0.05}$$

$$\therefore \ a = \frac{20000 \times 2.6 \times 0.05}{1.6} = 1625(\text{만원})$$

22. 수열 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$, $\sqrt{7-2\sqrt{2}}, \cdots$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 10 일 때, n의 값은?

① 116 ② 117 ③ 118 ④ 119 ⑤ 120

해설

$$a_1 = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$
$$a_2 = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$a_3 = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

따라서 $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$S_n = \sqrt{n+1}-1$$
$$\sqrt{n+1}-1 = 10$$
$$\sqrt{n+1} = 11$$
$$n+1 = 121$$
$$n = 120$$

23. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{n}{n+1}$ ② $\frac{2n}{n+1}$ ③ $\frac{3n}{n+1}$ ④ $\frac{4n}{n+1}$ ⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$\alpha_n+\beta_n=-4$

$\alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)$

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{k=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=4\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{4}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$$

25. 이차방정식 $x^2-8x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자. $\log_2\left(\alpha+\dfrac{4}{\beta}\right)+\log_2\left(\beta+\dfrac{4}{\alpha}\right)=k$일 때, 2^k의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 25

해설

두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=1$이고,

$$\log_2\left(\alpha+\frac{4}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{4}{\alpha}\right)$$

$$=\log_2\left(\alpha\beta+4+4+\frac{16}{\alpha\beta}\right)$$

$$=\log_2 25=k$$

$$\therefore\ 2^k=2^{\log_2 25}=25$$