1. $x = \dfrac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x과 같은 것은?

① a ② b ③ a^b ④ b^2 ⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \dfrac{\dfrac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\dfrac{\log_b b}{\log_b a}} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$

2. $a,\ x,\ y$가 양의 실수이고 $A = \log_a \frac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \frac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$ ② $\log_a \frac{1}{y^5}$ ③ $\log_a \frac{1}{xy}$
④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$ ⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$3A + 2B$
$= 3(2\log_a x - 3\log_a y) + 2(2\log_a y - 3\log_a x)$
$= -5\log_a y = \log_a \frac{1}{y^5}$

3. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $a > 0,\ a \neq 1, b > 0, c > 0$)

보기

㉠ $\log_a (b+c) = \log_a b \cdot \log_a c$

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

㉢ $\log_a b^c = (\log_a b)^c$

㉣ $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c} \log_a b$

① ㉠, ㉣　② ㉡, ㉢　③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\log_a (b+c) \neq \log_a b \cdot \log_a c$(거짓)

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$(참)

㉢ $\log_a b^c = c \log_a b \neq (\log_a b)^c$(거짓)

㉣ $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c} \log_a b$(참)

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

4. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}+\log_2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\ (\text{단, } x>1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}+\log_2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

$=\log_2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

$=\log_2\{(x+1)-(x-1)\}=\log_2 2=1$

5. $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$라 할 때, $\log_{24}\sqrt{18}$을 a, b를 사용하여 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+2b}{2(a+3b)}$ ② $\dfrac{a+2b}{2(3a+b)}$ ③ $\dfrac{2a+b}{2(3a+b)}$

④ $\dfrac{2(a+2b)}{3a+b}$ ⑤ $\dfrac{2(2a+b)}{a+3b}$

해설

$\log_{24}\sqrt{18} = \dfrac{\log_5\sqrt{18}}{\log_5 24}$에서

$\log_5\sqrt{18} = \dfrac{1}{2}\log_5 18 = \dfrac{1}{2}\log_5(2\cdot 3^2)$

$= \dfrac{1}{2}(\log_5 2 + 2\log_5 3) = \dfrac{1}{2}(a+2b)$

$\log_5 24 = \log_5(2^3\cdot 3) = 3\log_5 2 + \log_5 3 = 3a+b$

$\therefore \log_{24}\sqrt{18} = \dfrac{\log_5\sqrt{18}}{\log_5 24} = \dfrac{\frac{1}{2}(a+2b)}{3a+b} = \dfrac{a+2b}{2(3a+b)}$

6. 1보다 큰 정수 a, b, c에 대하여 $p = a^{12} = b^4 = (abc)^2$일 때, $\log_c p$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ 3　④ 6　⑤ 9

해설

주어진 식에서 $\log_p a = \frac{1}{12}$, $\log_p b = \frac{1}{4}$, $\log_p abc = \frac{1}{2}$

$\log_c p = x$라 하면 $\log_p c = \frac{1}{x}$이고,

$\log_p abc = \log_p a + \log_p b + \log_p c$이므로

$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

$\therefore\ x = 6$

$\therefore\ \log_c p = 6$

7. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2 - ax + 1)$이 정의되기 위한 정수 a의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a-3| > 0$이고 $|a-3| \neq 1$

$\therefore a \neq 3,\ a \neq 2,\ a \neq 4 \cdots\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 진수조건에서 $3ax^2 - ax + 1 > 0$

① $a = 0$ 일 때, $1 > 0$ 이므로 성립

② $a > 0$일 때, 방정식 $3ax^2 - ax + 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = a^2 - 12a < 0,\ a(a-12) < 0$

$\therefore 0 < a < 12$

①, ②에서 $0 \leq a < 12 \cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수는 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 9개다.

8. X에 대한 이차방정식 $X^2-5X+5=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$, $a=\alpha-\beta$ 라 할 때, $\log_a \alpha+\log_a \beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\alpha+\beta=5 \quad \alpha\beta=5$

$a=\alpha-\beta=\sqrt{5^2-4\cdot 5}=\sqrt{5}$

$\log_a \alpha+\log_a \beta=\log_a \alpha\beta=\log_{\sqrt{5}} 5=2$

9. 다음 세 실수 $A = \log_2 12 - \log_2 3$, $B = \dfrac{2\log_3 3\sqrt{3}}{\log_2 4}$, $C = 6^{2\log_6 \sqrt{3}}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < A < C$

④ $C < A < B$　　⑤ $C < B < A$

해설

로그의 성질을 이용하여 세 수를 간단히 한 후 비교한다.

$A = \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \dfrac{12}{3} = \log_2 4 = 2$

$B = \dfrac{2\log_3 3\sqrt{3}}{\log_2 4} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{3}{2}\log_3 3}{2\log_2 2} = \dfrac{3}{2}$

$C = 6^{2\log_6 \sqrt{3}} = 6^{\log_6 3} = 3^{\log_6 6} = 3$

$\therefore B < A < C$

10. $\log_{(x-1)}(-x^2+4x-3)$ 값이 존재하기 위한 x의 범위는?

① $1<x<2,\ 2<x<3$　② $1<x\le 2,\ 2<x<3$
③ $1<x<2,\ 2<x\le 3$　④ $1<x<2,\ 2\le x<3$
⑤ $1<x<3,\ 3<x<4$

해설

밑 : $x-1>0,\ x-1\neq 1\cdots$㉠
진수 : $-x^2+4x-3>0$
$x^2-4x+3<0$
$(x-1)(x-3)<0,\ 1<x<3\cdots$㉡
따라서 ㉠, ㉡를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는
$\therefore\ 1<x<2,\ 2<x<3$