

1. $x = \frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x 과 같은 것은?

① a

② b

③ a^b

④ b^2

⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \frac{\frac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\log_b b} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$

2. a, x, y 가 양의 실수이고 $A = \log_a \frac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \frac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$ 와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$

② $\log_a \frac{1}{y^5}$

③ $\log_a \frac{1}{xy}$

④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$

⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$$3A + 2B$$

$$= 3(2 \log_a x - 3 \log_a y) + 2(2 \log_a y - 3 \log_a x)$$

$$= -5 \log_a y = \log_a \frac{1}{y^5}$$

3. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$)

보기

㉠ $\log_a(b+c) = \log_a b \cdot \log_a c$

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

㉢ $\log_a b^c = (\log_a b)^c$

㉣ $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$

① ㉠, ㉣

② ㉡, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\log_a(b+c) \neq \log_a b \cdot \log_a c$ (거짓)

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ (참)

㉢ $\log_a b^c = c \log_a b \neq (\log_a b)^c$ (거짓)

㉣ $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

4. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \quad (\text{단, } x > 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & \log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

5. $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ 라 할 때, $\log_{24} \sqrt{18}$ 을 a, b 를 사용하여 나타낸 것은?

① $\frac{a+2b}{2(a+3b)}$

② $\frac{a+2b}{2(3a+b)}$

③ $\frac{2a+b}{2(3a+b)}$

④ $\frac{2(a+2b)}{3a+b}$

⑤ $\frac{2(2a+b)}{a+3b}$

해설

$$\log_{24} \sqrt{18} = \frac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24} \text{에서}$$

$$\log_5 \sqrt{18} = \frac{1}{2} \log_5 18 = \frac{1}{2} \log_5 (2 \cdot 3^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\log_5 2 + 2 \log_5 3) = \frac{1}{2} (a + 2b)$$

$$\log_5 24 = \log_5 (2^3 \cdot 3) = 3 \log_5 2 + \log_5 3 = 3a + b$$

$$\therefore \log_{24} \sqrt{18} = \frac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24} = \frac{\frac{1}{2}(a+2b)}{3a+b} = \frac{a+2b}{2(3a+b)}$$

6. 1보다 큰 정수 a, b, c 에 대하여 $p = a^{12} = b^4 = (abc)^2$ 일 때, $\log_c p$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ 3

④ 6

⑤ 9

해설

$$\text{주어진 식에서 } \log_p a = \frac{1}{12}, \log_p b = \frac{1}{4}, \log_p abc = \frac{1}{2}$$

$$\log_c p = x \text{라 하면 } \log_p c = \frac{1}{x} \text{이고,}$$

$$\log_p abc = \log_p a + \log_p b + \log_p c \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x}, \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = 6$$

$$\therefore \log_c p = 6$$

7. 모든 실수 x 에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2 - ax + 1)$ 이 정의되기 위한 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a - 3| > 0$ 이고 $|a - 3| \neq 1$

$\therefore a \neq 3, a \neq 2, a \neq 4 \dots \dots \textcircled{7}$

(ii) 진수조건에서 $3ax^2 - ax + 1 > 0$

① $a = 0$ 일 때, $1 > 0$ 이므로 성립

② $a > 0$ 일 때, 방정식 $3ax^2 - ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 12a < 0, a(a - 12) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 12$$

①, ②에서 $0 \leq a < 12 \dots \dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 동시에 만족하는 정수는 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 9개다.

8. X 에 대한 이차방정식 $X^2 - 5X + 5 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$, $a = \alpha - \beta$ 라 할 때, $\log_a \alpha + \log_a \beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\alpha + \beta = 5 \quad \alpha\beta = 5$$

$$a = \alpha - \beta = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5} = \sqrt{5}$$

$$\log_a \alpha + \log_a \beta = \log_a \alpha\beta = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$$

9. 다음 세 실수 $A = \log_2 12 - \log_2 3$, $B = \frac{2 \log_3 3 \sqrt{3}}{\log_2 4}$, $C = 6^{2 \log_6 \sqrt{3}}$ 의
대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < A < C$

④ $C < A < B$

⑤ $C < B < A$

해설

로그의 성질을 이용하여 세 수를 간단히 한 후 비교한다.

$$A = \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

$$B = \frac{2 \log_3 3 \sqrt{3}}{\log_2 4} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \log_3 3}{2 \log_2 2} = \frac{3}{2}$$

$$C = 6^{2 \log_6 \sqrt{3}} = 6^{\log_6 3} = 3^{\log_6 6} = 3$$

$$\therefore B < A < C$$

10. $\log_{(x-1)}(-x^2 + 4x - 3)$ 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $1 < x < 2, 2 < x < 3$

② $1 < x \leq 2, 2 < x < 3$

③ $1 < x < 2, 2 < x \leq 3$

④ $1 < x < 2, 2 \leq x < 3$

⑤ $1 < x < 3, 3 < x < 4$

해설

밑 : $x - 1 > 0, x - 1 \neq 1 \cdots \textcircled{\gamma}$

진수 : $-x^2 + 4x - 3 > 0$

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$(x - 1)(x - 3) < 0, 1 < x < 3 \cdots \textcircled{\text{L}}$$

따라서 $\textcircled{\gamma}, \textcircled{\text{L}}$ 를 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\therefore 1 < x < 2, 2 < x < 3$$