1. 수열 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$ 에서 2014 번째 항은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 수열은 1, 2, 3, 4, 5 의 5 개의 숫자가 반복되므로 $2014 = 5 \times 402 + 4$ 에서 2014 번째 항은 4 이다.

2. 다음 수열에서 $a+b$의 값을 구하여라.

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ a,\ b,\ \cdots$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1, & & 2, & & 4, & & 7, & & 11, & & 16, & & 22 \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \end{array}$$

$\therefore a=16,\ b=22$

$a+b=16+22=38$

3. 함수 $f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{f(k)}$ 의 값은?

① $\dfrac{40}{7}$ ② $\dfrac{45}{8}$ ③ $\dfrac{17}{3}$ ④ $\dfrac{57}{10}$ ⑤ $\dfrac{63}{11}$

해설

$f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$=\sum_{k=1}^{20}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{f(x)}=\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

$=\sum_{k=1}^{20}\dfrac{6}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{20}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=6\left(1-\dfrac{1}{21}\right)=6\times\dfrac{20}{21}=\dfrac{40}{7}$

4. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+2015}$ 의 값은?

① $\frac{2014}{2015}$ ② $\frac{2015}{2016}$ ③ $\frac{2015}{1008}$ ④ $\frac{2014}{1008}$ ⑤ 2

해설

$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$ 이므로

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{2015}\frac{2}{n(n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{2015}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{2016}\right)=\frac{2\times2015}{2016}=\frac{2015}{1008}$

5. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^3 - n$인 수열 $\{a_n\}$에서 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$의 값은?

① $\frac{17}{19}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{19}{40}$ ④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{19}{60}$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - n) - \left\{(n-1)^3 - (n-1)\right\} = 3n(n-1)(n \geq 2)$

$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) (n \geq 2)$

$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$

$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{19}{60}$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$　② $\frac{20}{21}$　③ $\frac{31}{21}$　④ $\frac{40}{21}$　⑤ $\frac{50}{21}$

해설

(준 식)$=\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\cdot\beta_n}$

$=\sum_{n=1}^{10}\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$=4\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

7. $a_n = 2n^2 + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 인 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \left\{2(n+1)^2 + (n+1)\right\} - (2n^2 + n) \\ &= 4n + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k+3) \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 3 \cdot 10 \\ &= 250 \end{aligned}$$

8. 수열 $3,\ 4,\ 6,\ 10,\ 18,\ 34,\ 66, \cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① $2^{n-2}+2$　② $2^{n-1}-1$　③ $2^{n-1}+2$
④ $2^{n+1}-2$　⑤ $2^{n+1}+2$

해설

주어진 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\}: 3,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 10,\ \ 18,\ \ 34,\ 66, \cdots$

$\quad\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee$

$\{a_n\}: \ \ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32, \cdots$

즉, 수열$\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2 인 등비수열이므로

$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 3 + \frac{1 \cdot (2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2^{n-1}+2\end{aligned}$$

9. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 2,\ a_{10} = 25$이다. 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, $b_1 + b_2 + \cdots + b_9$의 값은?

① 21　　② 22　　③ 23　　④ 24　　⑤ 25

해설

$a_{10} - a_1 = b_1 + b_1 + \cdots + b_9$

$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_9 = 25 - 2 = 23$

10. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \dfrac{n(1-x^n)}{2}$ ② $S = \dfrac{1-x^n}{2}$

③ $S = \dfrac{1-x^n}{2} - \dfrac{2x^n}{x}$ ④ $S = \dfrac{1-x^n}{1+x} - \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -)\ xS = & \quad\ \ x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x \end{array}$$

$= \dfrac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$

$\therefore S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

11. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots$ ㉠

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots$ ㉡

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

12. 다음 군수열 $(2), (4,\ 6), (8,\ 10,\ 12), (14,\ \cdots),\ \cdots$ 에서 제 25군의 5번째 항은?

① 567　② 589　③ 602　④ 610　⑤ 612

해설

제 n군의 첫째항을 $\{a_n\}$이라 하면

$$\begin{array}{llllllll} \{a_n\}: & 2, & 4, & 8, & 14, & 22, & \cdots & \\ & \vee & \vee & \vee & \vee & & & \\ \{b_n\}: & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & \to & b_n = 2n \end{array}$$

따라서 $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = n^2 - n + 2$이다.

제25군의 첫째항은 $25^2 - 25 + 2 = 602$이고, 5번째 항은 $602 + 8 = 610$

13. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(1, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 3, 4)$\cdots$

① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

해설

제n군의 합을 a_n 이라 하면

$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \frac{10\cdot 11}{2}\right) \\ &= 220\end{aligned}$$

14. n이 자연수일 때, $n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$의 값은?

① 2^{n+1}　② $2^{n+1}-n$　③ $2^{n+1}-n-2$
④ 2^n+n2　⑤ $2^n n+2$

해설

주어진 식의 값을 S라 하면
$S=n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$
멱급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & 2S= & \quad n\cdot 2+(n-1)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}+2^n \\ -) & S= & n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2^{n-1} \\ \hline & S= & -n+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n \end{array}$$

$\therefore S=-n+\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-n-2$

15. 다음 수열의 합은? (단, $x \neq 1$)

$$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1}$$

① $S = \dfrac{(1-x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{(2n-1)x^n}{1-x}$

② $S = \dfrac{(1+x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{1-(2n-1)x^n}{1-x}$

③ $S = \dfrac{(1-x^n)}{(2-x)^2} - \dfrac{1+(2n-1)x^n}{2-x}$

④ $S = \dfrac{2(2-x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{(2n-2)x^n}{1-x}$

⑤ $S = \dfrac{2(1-x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{1+(2n-1)x^n}{1-x}$

해설

$S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1} \cdots$ ㉠

$xS = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 +$
$\cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n \cdots$ ㉡

이므로 ㉠ - ㉡을 하면

$(1-x)S = 2(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}) - 1 - (2n-1)x^n$

$(1-x)S = 2 \cdot \dfrac{1 \cdot (x^n - 1)}{x-1} - 1 - (2n-1)x^n$

$S = \dfrac{2(1-x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{1+(2n-1)x^n}{1-x}$

16. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_9$ ② $a_{20}-a_{10}$ ③ $a_{21}-a_9$

④ $a_{21}-a_{10}$ ⑤ $a_{21}-a_{11}$

해설

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ 이므로

$a_{21} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20}$

$b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20}$

$= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots b_9)$

$= a_{21} - a_{10}$

17. 수열 $1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ \cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① n^2+n+1　② n^2+n-1　③ n^2+n-2
④ n^2-n+1　⑤ n^2-n-1

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$$\begin{array}{l} \{a_n\} : 1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ \cdots \\ \qquad\quad \bigvee\ \bigvee\ \bigvee\ \ \bigvee \\ \qquad\quad 4\quad 6\quad 8\quad 10\ \ \cdots\ \ \rightarrow b_n = 2n+2 \end{array}$$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

$= 1 + 2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$

$= n^2+n-1$

18. 수열 3, 4, 6, 10, 18, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은?

① $2n^2+2n-1$ ② $2n^2+2n+1$ ③ 2^n+2n-1
④ n^2-2n+1 ⑤ 2^n-2n

해설

$\{a_n\}$: 3, 4, 6, 10, 18, $\cdots$

$\bigvee \; \bigvee \; \bigvee \; \bigvee$

$\{b_n\}$: 1 2 4 8 $\cdots$

$a_n = 3 + \underbrace{(1+2+4+\cdots)}_{(n-1)\text{개}}$

$= 3 + \dfrac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1}+2$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1}+2) = \dfrac{2^n-1}{2-1} + 2n = 2^n+2n-1$

19. 수열 1, 3, 7, 13, 21, $\cdots$ 의 일반항을 a_n, 계차수열의 일반항을 b_n이라 할 때, 다음 조건에서 [㉠] + [㉡] 의 값은?

I. 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이[㉠], 공차가 2인 등차수열이다
II. $a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9} 2k =$ [㉡]

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

해설

1, 3, 7, 13, 21, $\cdots$
⋁ ⋁ ⋁ ⋁
2, 4, 6, 8, $\cdots$

$b_n = 2n \ \therefore$ [㉠] $= 2$

$a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^{9} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2}$

$= 1 + 90 = 91 \ \therefore$ [㉡] $= 91$

㉠+㉡$= 2 + 91 = 93$

20. 수열 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, $\cdots$, 에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

1/ 1, 2/1, 2, 3/ 1, 2, 3, 4/$\cdots$

1군은 1

2군은 1, 2

3군은 1, 2, 3이므로

7군은 1, 2, 3, $\cdots$, 7

(6까지의 항의 총수)$= 1 + 2 + \cdots + 6 = 21$

$21 + 7 = 28$(번째 항)

21. 수열 $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 100항까지의 합은?

① 930 ② 945 ③ 950 ④ 955 ⑤ 960

해설

$(1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 4,\ 4), \cdots$ 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 n군의 항수는 n이므로 100번째 항은

$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} < 100$

에서 $\dfrac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제 14군의 9항이다.

그리고 제 n군까지의 합을 구해 보면

$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

첫째항부터 제 100항까지의 합 S_{100}은 제 13군까지의 합에 14를 9개 더한 값이 된다.

$\therefore S_{100} = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$

22. 수열 $2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 12,\ \cdots$ 에서 처음으로 200보다 커지는 항은?

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면, 그 계차수열의 일반항 b_n은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

$\therefore b_n = n$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$= 2 + \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n^2-n}{2} + 2$

따라서 $\dfrac{n^2-n}{2} + 2 > 200$에서 $n^2 - n = n(n-1) > 396$

이므로 $19 \times 20 = 380,\ 20 \times 21 = 420$에서 $n = 21$

23. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b = a_{n+1} - a_n$ 이라 할 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, $a_n \cdot b_n \neq 0$)

보기

ㄱ 수열$\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{b_n\}$도 등비수열이다.

ㄴ 수열$\{b_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n\}$도 등비수열이다.

ㄷ 수열$\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n \cdot b_n\}$도 등비수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ. $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면
$a_n = ar^{n-1}$ 이고,
$b_n = a_{n+1} - a_n = ar^n - ar^{n-1} = a(r-1)r^{n-1}$ 이다.
따라서, $\{b_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r인 등비수열이다. ∴ 참
ㄴ. (반례) $\{a_n\}$이 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열일 때,
$\{a_n\}$의 첫째항이 2이며 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.
$\{a_n\}$: 2. 3. 5. 9. 17. $\cdots$
$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
$\{b_n\}$: 1. 2. 4. 8. $\cdots$
∴ 거짓
ㄷ. $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면
$a_n = ar^{n-1}$ 이고, $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r인 등비수열이므로, $\{a_n \cdot b_n\}$은
첫째항이 $a^2(r-1)$, 공비가 r^2 인 등비수열이다. ∴ 참

24. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, $b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20} - a_{19}$　② $a_{20} - a_2$　③ $a_{21} - a_{20}$　④ $a_{21} - a_2$　⑤ $a_{21} - a_1$

해설

$b_n = a_{n+1} - a_n$이므로

$b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{20}$

$= (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{20})$

$= -a_2 + a_{21} = a_{21} - a_2$

25. 다음과 같은 수열에서 ( )를 하나의 군으로 볼 때, 제 11군의 두 번째 수를 구하여라.

$$(1),\ (2,\ 3),\ (4,\ 5,\ 6),\ (7,\ 8,\ 9,\ 10),\cdots$$

▶ 답:

▷ 정답: 57

해설

(1군의 항의 개수) $= 1$
(2군의 항의 개수) $= 2$
(3군의 항의 개수) $= 3$이므로
(10군까지의 항의 총수)$= 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$
$\therefore$ (11군의 첫번째 수)$= 56$이므로
(11군의 두번째 수)$= 57$