

1. 수열 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, ... 에서 2014 번째 항은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

주어진 수열은 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자가 반복되므로
 $2014 = 5 \times 402 + 4$ 에서 2014 번째 항은 4이다.

2. 다음 수열에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.

1, 2, 4, 7, 11, a , b , ...

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22

∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨

1 2 3 4 5 6

$\therefore a = 16, b = 22$

$a + b = 16 + 22 = 38$

3. 함수 $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)}$ 의 값은?

① $\frac{40}{7}$

② $\frac{45}{8}$

③ $\frac{17}{3}$

④ $\frac{57}{10}$

⑤ $\frac{63}{11}$

해설

$$\begin{aligned} f(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(x)} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = 6 \times \frac{20}{21} = \frac{40}{7} \end{aligned}$$

4. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+2015}$ 의 값은?

① $\frac{2014}{2015}$

② $\frac{2015}{2016}$

③ $\frac{2015}{1008}$

④ $\frac{2014}{1008}$

⑤ 2

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \text{ 이므로}$$

$$(\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^{2015} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{2015} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2016} \right) = \frac{2 \times 2015}{2016} = \frac{2015}{1008}$$

5. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^3 - n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$ 의 값은?

① $\frac{17}{19}$

② $\frac{17}{30}$

③ $\frac{19}{40}$

④ $\frac{17}{50}$

⑤ $\frac{19}{60}$

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - n) - \{(n-1)^3 - (n-1)\} = 3n(n-1) \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{20} \right) = \frac{19}{60}$$

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n - 1)(2n + 1) = 0$ 의 두 근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은?

① $\frac{11}{21}$

② $\frac{20}{21}$

③ $\frac{31}{21}$

④ $\frac{40}{21}$

⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \sum_{n=1}^{10} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \cdot \beta_n} \\&= \sum_{n=1}^{10} \frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)} \\&= 4 \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\&= 2 \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\&= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21}\end{aligned}$$

7. $a_n = 2n^2 + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 제차수열을 $\{b_n\}$ 이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \{2(n+1)^2 + (n+1)\} - (2n^2 + n) \\ &= 4n + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k + 3) \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 3 \cdot 10 \\ &= 250 \end{aligned}$$

8. 수열 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, ... 의 일반항 a_n 은?

① $2^{n-2} + 2$

② $2^{n-1} - 1$

③ $2^{n-1} + 2$

④ $2^{n+1} - 2$

⑤ $2^{n+1} + 2$

해설

주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$\{a_n\} : 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, \dots$

$\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$

$\{a_n\} : 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32, \dots$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 3 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^{n-1} + 2 \end{aligned}$$

9. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 2$, $a_{10} = 25$ 이다. 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, $b_1 + b_2 + \cdots + b_9$ 의 값은?

① 21

② 22

③ 23

④ 24

⑤ 25

해설

$$a_{10} - a_1 = b_1 + b_1 + \cdots + b_9$$

$$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_9 = 25 - 2 = 23$$

10. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \frac{n(1-x^n)}{2}$

② $S = \frac{1-x^n}{2}$

③ $S = \frac{1-x^n}{2} - \frac{2x^n}{x}$

④ $S = \frac{1-x^n}{1+x} - \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로
양변에 x 를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -) xS &= \quad x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x^n \end{aligned}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

11. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$$

12. 다음 군수열 (2), (4, 6), (8, 10, 12), (14, ...), ... 에서 제 25군의 5 번째 항은?

① 567

② 589

③ 602

④ 610

⑤ 612

해설

제 n 군의 첫째항을 $\{a_n\}$ 이라 하면

$\{a_n\} : 2, 4, 8, 14, 22, \dots$

$\vee \vee \vee \vee$

$\{b_n\} : 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots \rightarrow b_n = 2n$

따라서 $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = n^2 - n + 2$ 이다.

제 25군의 첫째항은 $25^2 - 25 + 2 = 602$ 이고, 5 번째 항은 $602 + 8 = 610$

13. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군 제2군 제3군 제4군
(1), (1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4)...

① 200

② 210

③ 220

④ 230

⑤ 240

해설

제 n 군의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= 220\end{aligned}$$

14. n 이 자연수일 때, $n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$ 의 값은?

① 2^{n+1}

② $2^{n+1} - n$

③ $2^{n+1} - n - 2$

④ $2^n + n2$

⑤ $2^n n + 2$

해설

주어진 식의 값을 S 라 하면

$$S = n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

역급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{r} 2S = \quad n \cdot 2 \quad + (n-1)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ -) S = n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + \quad 2^{n-1} \\ \hline S = -n + \quad 2 + \quad 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n \end{array}$$

$$\therefore S = -n + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - n - 2$$

15. 다음 수열의 합은? (단, $x \neq 1$)

$$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1}$$

$$\textcircled{1} \quad S = \frac{(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{(2n-1)x^n}{1-x}$$

$$\textcircled{2} \quad S = \frac{(1+x^n)}{(1-x)^2} - \frac{1-(2n-1)x^n}{1-x}$$

$$\textcircled{3} \quad S = \frac{(1-x^n)}{(2-x)^2} - \frac{1+(2n-1)x^n}{2-x}$$

$$\textcircled{4} \quad S = \frac{2(2-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{(2n-2)x^n}{1-x}$$

$$\textcircled{5} \quad S = \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{1+(2n-1)x^n}{1-x}$$

해설

$$S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1} \cdots \textcircled{㉠}$$

$$xS = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 +$$

$$\cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$(1-x)S = 2(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}) - 1 - (2n-1)x^n$$

$$(1-x)S = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^n - 1)}{x - 1} - 1 - (2n-1)x^n$$

$$S = \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{1+(2n-1)x^n}{1-x}$$

16. 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$ 과 같은 것은?

① $a_{20} - a_9$

② $a_{20} - a_{10}$

③ $a_{21} - a_9$

④ $a_{21} - a_{10}$

⑤ $a_{21} - a_{11}$

해설

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ 이므로}$$

$$a_{21} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20}$$

$$b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20}$$

$$= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_9)$$

$$= a_{21} - a_{10}$$

17. 수열 1, 5, 11, 19, 29, ...의 일반항 a_n 은?

① $n^2 + n + 1$

② $n^2 + n - 1$

③ $n^2 + n - 2$

④ $n^2 - n + 1$

⑤ $n^2 - n - 1$

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$\{a_n\} : 1, 5, 11, 19, 29, \dots$

$\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$

4 6 8 10 $\dots \rightarrow b_n = 2n + 2$

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 2)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$$

$$= n^2 + n - 1$$

18. 수열 3, 4, 6, 10, 18, ...의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은?

① $2n^2 + 2n - 1$

② $2n^2 + 2n + 1$

③ $2^n + 2n - 1$

④ $n^2 - 2n + 1$

⑤ $2^n - 2n$

해설

$$\{a_n\} : 3, 4, 6, 10, 18, \dots$$

$$\quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$$

$$\{b_n\} : 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad \dots$$

$$a_n = 3 + \underbrace{(1 + 2 + 4 + \dots)}_{(n-1)\text{개}}$$

$$= 3 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 2$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^n (2^{k-1} + 2) = \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 2n = 2^n + 2n - 1$$

19. 수열 1, 3, 7, 13, 21, ...의 일반항을 a_n , 계차수열의 일반항을 b_n 이라 할 때, 다음 조건에서 $[\ominus] + [\oslash]$ 의 값은?

I. 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $[\ominus]$, 공차가 2인 등차수열이다

II. $a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^9 2k = [\oslash]$

① 91

② 93

③ 95

④ 97

⑤ 99

해설

1, 3, 7, 13, 21, ...

∨ ∨ ∨ ∨

2, 4, 6, 8, ...

$$b_n = 2n \therefore [\ominus] = 2$$

$$a_{10} = 1 + \sum_{k=1}^9 2k = 1 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= 1 + 90 = 91 \therefore [\oslash] = 91$$

$$\ominus + \oslash = 2 + 91 = 93$$

20. 수열 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, $\dots$,에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

1/ 1, 2/1, 2, 3/ 1, 2, 3, 4/ $\dots$

1군은 1

2군은 1, 2

3군은 1, 2, 3이므로

7군은 1, 2, 3, $\dots$, 7

(6까지의 항의 총수) = $1 + 2 + \dots + 6 = 21$

$21 + 7 = 28$ (번째 항)

21. 수열 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... 에서 첫째항부터 제 100 항까지의 합은?

① 930

② 945

③ 950

④ 955

⑤ 960

해설

(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), ... 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 n 군의 항수는 n 이므로 100 번째 항은

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} < 100$$

에서 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제 14 군의 9 항이다.

그리고 제 n 군까지의 합을 구해 보면

$$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 이므로}$$

첫째항부터 제 100 항까지의 합 S_{100} 은 제 13 군까지의 합에 14 를 9 개 더한 값이 된다.

$$\therefore S_{100} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$$

22. 수열 2, 3, 5, 8, 12, ... 에서 처음으로 200보다 커지는 항은?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면, 그 제차수열의 일반항 b_n 은 1, 2, 3, 4, ...

$$\therefore b_n = n$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 2 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} + 2$$

따라서 $\frac{n^2 - n}{2} + 2 > 200$ 에서 $n^2 - n = n(n-1) > 396$

이므로 $19 \times 20 = 380$, $20 \times 21 = 420$ 에서 $n = 21$

23. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $b = a_{n+1} - a_n$ 이라 할 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, $a_n \cdot b_n \neq 0$)

보기

- ㉠ 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{b_n\}$ 도 등비수열이다.
 ㉡ 수열 $\{b_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{a_n\}$ 도 등비수열이다.
 ㉢ 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{a_n \cdot b_n\}$ 도 등비수열이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $\{a_n\}$ 이 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열이면
 $a_n = ar^{n-1}$ 이고,

$$b_n = a_{n+1} - a_n = ar^n - ar^{n-1} = a(r-1)r^{n-1} \text{이다.}$$

따라서, $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r 인 등비수열이다. ∴ 참

㉡. (반례) $\{a_n\}$ 이 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열일 때,
 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2이며 $\{a_n\}$ 은 등비수열이 아니다.

$\{a_n\}$: 2. 3. 5. 9. 17. ...

 V V V V

$\{b_n\}$: 1. 2. 4. 8. ...

∴ 거짓

㉢. $\{a_n\}$ 이 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열이면

$a_n = ar^{n-1}$ 이고, $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r 인 등비수열이므로, $\{a_n \cdot b_n\}$ 은

첫째항이 $a^2(r-1)$, 공비가 r^2 인 등비수열이다. ∴ 참

24. 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, $b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{20}$ 과 같은 것은?

① $a_{20} - a_{19}$

② $a_{20} - a_2$

③ $a_{21} - a_{20}$

④ $a_{21} - a_2$

⑤ $a_{21} - a_1$

해설

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ 이므로}$$

$$b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{20}$$

$$= (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{20})$$

$$= -a_2 + a_{21} = a_{21} - a_2$$

25. 다음과 같은 수열에서 ()를 하나의 군으로 볼 때, 제 11군의 두 번째 수를 구하여라.

(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), ...

▶ 답 :

▷ 정답 : 57

해설

$$(1\text{군의 항의 개수}) = 1$$

$$(2\text{군의 항의 개수}) = 2$$

$$(3\text{군의 항의 개수}) = 3 \text{이므로}$$

$$(10\text{군까지의 항의 총수}) = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$$

$$\therefore (11\text{군의 첫번째 수}) = 56 \text{이므로}$$

$$(11\text{군의 두번째 수}) = 57$$