

1. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3}$ 을 간단히 하면?

- ① 2 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt[4]{a^3}$ ④ $\sqrt[4]{a^3}$ ⑤ $\sqrt[4]{4a^3}$

해설

$$\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \left(2^4 a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} = 2a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}} = 2a^0 = 2$$

2. $5^{\log_5 2 + 3 \log_5 3 - \log_5 6}$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & 5^{\log_5 2 + 3 \log_5 3 - \log_5 6} \\ &= 5^{\log_5 2 + \log_5 3^3 - \log_5 6} \\ &= 5^{\log_5 \frac{2 \times 3^3}{6}} = 5^{\log_5 3^2} = 9 \end{aligned}$$

3. $5^a = 2$, $5^b = 3$ 이라 할 때, $\log_6 72$ 를 a 와 b 의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{a+b}{a-b}$
④ $\frac{2a+b}{a+b}$

② $\frac{2a+b}{b-a}$
⑤ $\frac{3a+2b}{a+b}$

③ $\frac{2a-b}{a+b}$

해설

$$a = \log_5 2, b = \log_5 3$$

$$\log_6 72 = \frac{3 \log_5 2 + 2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a + 2b}{a + b}$$

4. $\frac{1}{2} \log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

5. $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{3} = a, \sqrt[3]{2} = b \text{라고 하면} \\ &(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= a^3 + b^3 \\ &= 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

6. 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a + b = 13$ 이다.

7. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, $a + a^{-1}$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^2$

$a + a^{-1} + 2 = 16$

$\therefore a + a^{-1} = 14$

8. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{13}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

9. $11^x = 25$, $275^y = 125$ 일 때, $\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ 의 값은?

- ㉠ -2 ㉡ -1 ㉢ 0 ㉣ 1 ㉤ 2

해설

$$(11^x)^{\frac{1}{x}} = (25)^{\frac{1}{x}} \text{에서 } 5^{\frac{2}{x}} = 11$$

$$(275^y)^{\frac{1}{y}} = (5^3)^{\frac{1}{y}} \text{에서 } 5^{\frac{3}{y}} = 275 \text{ 이므로}$$

$$5^{\frac{2}{x}} \div 5^{\frac{3}{y}} = 11 \div 275 = \frac{1}{25}$$

$$5^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = 5^{-2}, \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -2$$

10. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$ 이므로

$$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$$

따라서, $a = 4c, b = 2c$

a, b, c 의 최대공약수가 3이므로

$$c = 3, a = 12, b = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$$

11. $\log_{10}(1+1) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{99}\right)$
의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \log_{10} 2 + \log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \cdots + \log_{10} \frac{100}{99} \\&= \log_{10} \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} \right) \\&= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2\end{aligned}$$

12. $2x = \log_7 2$ 일 때, $\frac{7^{3x} + 7^{-3x}}{7^x + 7^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{7}{3}$

해설

$$2x = \log_7 2 \text{ 에서 } 7^{2x} = 2$$

$$\text{따라서 } \frac{7^{3x} + 7^{-3x}}{7^x + 7^{-x}} = \frac{(7^{3x} + 7^{-3x}) \times 7^{3x}}{(7^x + 7^{-x}) \times 7^{3x}}$$

$$= \frac{7^{6x} + 1}{7^{4x} + 7^{2x}} = \frac{(7^{2x})^3 + 1}{(7^{2x})^2 + 7^{2x}}$$

$$= \frac{2^3 + 1}{2^2 + 2} = \frac{3}{2}$$

13. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$$\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$$

$$(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$$

$$a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$$

$$(a+10b)(a-12b) = 0$$

$$\therefore a = -10b \text{ 또는 } a = 12b$$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0$, $2b > 0$, $62b-a > 0$ 이므로 $a > 0$, $b > 0$

따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

14. 서로 다른 세 양수 a, b, c 에 대하여 $\log_a b = \sin x, \log_a c = \cos x$ 일 때,

$b^{\sin x} \cdot c^{\cos x}$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ ab ⑤ ac

해설

$$\log_a b = \sin x \text{에서 } b = a^{\sin x}$$

$$\log_a c = \cos x \text{에서 } c = a^{\cos x}$$

$$\begin{aligned} \therefore b^{\sin x} \cdot c^{\cos x} &= (a^{\sin x})^{\sin x} \cdot (a^{\cos x})^{\cos x} \\ &= a^{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= a^1 = a \end{aligned}$$

15. $a^2b^5 = 1$ 일 때, $\log_{ab}(a^5b^2)$ 의 값은? (단, $ab \neq 1$, $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$)

① $\frac{5}{3}$

② $\frac{11}{3}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{11}{5}$

⑤ 1

해설

$$\log a^2b^5 = 0 \text{ 에서 } 2\log a + 5\log b = 0$$

$$\therefore \log b = -\frac{2}{5}\log a$$

$$\begin{aligned}\log_{ab}(a^5b^2) &= \frac{5\log a + 2\log b}{\log a + \log b} \\ &= \frac{3\log a - \frac{4}{5}\log a}{\log a - \frac{2}{5}\log a} \\ &= \frac{\frac{11}{5}\log a}{\frac{3}{5}\log a} \\ &= \frac{11}{3}\end{aligned}$$

16. $\triangle ABC$ 의 세 변 a, b, c 에 대하여
 $\log_{(a+b)} c + \log_{(a-b)} c = 2\log_{(a+b)} c \cdot \log_{(a-b)} c$ 와 같은 관계가 성립할
때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가? (단, $a > b, c \neq 1$)
- ① 정삼각형
② $b = c$ 인 이등변삼각형
③ $a = c$ 인 이등변 삼각형
④ a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
⑤ b 를 빗변으로 하는 직각삼각형

해설

밑의 변환 공식을 이용하면

$$\frac{1}{\log_c(a+b)} + \frac{1}{\log_c(a-b)} \\ = \frac{2}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)}$$

양변에 $\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)$ 를 곱하면

$$\log_c(a-b) + \log_c(a+b) = 2\log_c c$$

$$\log_c(a-b)(a+b) = \log_c c^2$$

로그의 정의에 의해

$$(a-b)(a+b) = c^2, a^2 - b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 a 를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

17. 이차방정식 $3x^2 - 8x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $P = \log_{\sqrt{10}}(3\alpha^2 - 7\alpha + 3) + \log_{\sqrt{10}}(3\beta^2 - 7\beta + 3)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}(1 - \log 3)$

③ $\frac{1}{2}(1 + \log 3)$

④ 1

⑤ $\log 3 \sqrt{2}$

해설

α, β 가 방정식 $3x^2 - 8x + 2 = 0$ 의 두 근이므로

$$3\alpha^2 - 8\alpha + 2 = 0, \quad 3\beta^2 - 8\beta + 2 = 0$$

$$3\alpha^2 - 7\alpha + 3 = \alpha + 1, \quad 3\beta^2 - 7\beta + 3 = \beta + 1$$

$$\therefore P = \log_{\sqrt{10}}(\alpha + 1) + \log_{\sqrt{10}}(\beta + 1)$$

$$= \log_{\sqrt{10}}(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

$$= \log_{\sqrt{10}}(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)$$

한편, $\alpha + \beta = \frac{8}{3}, \alpha\beta = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} + 1 = \frac{13}{3}$$

$$\therefore P = \log_{\sqrt{10}} \frac{13}{3} = 2 \log_{10} \frac{13}{3}$$

18. 세 종류의 박테리아 A, B, C 는 시간 당 일정한 비율로 증식하며, 각각의 개체 수는 1시간마다 각각 a 배, b 배, c 배로 된다고 한다. A 의 수는 2시간마다 2배, B 의 수는 3시간마다 3배, C 의 수는 4시간마다 5배가 되었다고 할 때, a, b, c 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
④ $b < c < a$ ⑤ $c < a < b$

해설

$a^2 = 2, b^3 = 3, c^4 = 5$ 이므로
 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt[3]{3}, c = \sqrt[4]{5}$
12제곱하여 비교하면
 $(\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64, (\sqrt[3]{3})^{12} = 3^4 = 81,$
 $(\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$
 $\therefore \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5} \therefore a < b < c$

19. $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$ 일 때, $\log_3 10$ 을 a , b 로 나타내면?

$$\textcircled{1} \frac{ab - 2a - 3b + 5}{2b - 1}$$

$$\textcircled{3} \frac{2ab + 2a - 7b + 3}{2b - 1}$$

$$\textcircled{5} \frac{ab - a - 3b + 3}{2b - 3}$$

$$\textcircled{2} \frac{ab - a - 3b + 3}{2b - 1}$$

$$\textcircled{4} \frac{3ab + 2a - 3b + 5}{2b - 1}$$

해설

로그의 밑을 모두 3 으로 통일시키면

$$\log_6 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (3 \times 5)}{\log_3 (2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{1 + \log_3 5}{\log_3 2 + 1} = a \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (2 \times 3^2)}{\log_3 (2^2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2}{\log_3 2^2 + \log_3 3} = \frac{\log_3 2 + 2}{2 \log_3 2 + 1} = b \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b(2 \log_3 2 + 1) = \log_3 2 + 2$$

$$2b \log_3 2 + b = \log_3 2 + 2$$

$$(2b - 1) \log_3 2 = 2 - b$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{2 - b}{2b - 1} \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a(\log_3 2 + 1) = 1 + \log_3 5$$

$$\log_3 5 = a \log_3 2 + a - 1$$

위의 식에 $\textcircled{3}$ 을 대입하면

$$\log_3 5 = \frac{a(2 - b)}{2b - 1} + a - 1$$

$$= \frac{a(2 - b) + (a - 1)(2b - 1)}{2b - 1}$$

$$= \frac{2a - ab + 2ab - a - 2b + 1}{2b - 1}$$

$$= \frac{ab + a - 2b + 1}{2b - 1}$$

$$\therefore \log_3 10 = \log_3 (2 \times 5) = \log_3 2 + \log_3 5$$

$$= \frac{2 - b}{2b - 1} + \frac{ab + a - 2b + 1}{2b - 1}$$

$$= \frac{ab + a - 3b + 3}{2b - 1}$$

20. 다음을 만족하는 두 자연수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하면?

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{m+n}\right)=\log n$$

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)=\log\frac{m+1}{m}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=\log\frac{m+2}{m+1}$$

⋮

$$\log\left(1+\frac{1}{m+n}\right)=\log\frac{m+n+1}{m+n}$$

따라서, 주어진 식의 좌변은

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=\log\left(\frac{m+1}{m}\times\frac{m+2}{m+1}\times\cdots\times\frac{m+n+1}{m+n}\right)\\&=\log\frac{m+n+1}{m}\end{aligned}$$

$$\therefore, \log\frac{m+n+1}{m}=\log n\text{에서}$$

$$\frac{m+n+1}{m}=n$$

$$mn-m-n=1, (m-1)(n-1)=2$$

m, n 이 자연수이므로 $m-1=2, n-1=1$ 또는 $m-1=1, n-1=2$

$$\therefore m=3, n=2 \text{ 또는 } m=2, n=3$$

$$\therefore mn=6$$