1. $a>0$일 때, $\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3}$을 간단히 하면?

① 2　　② $\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt[4]{a^3}$　　④ $\sqrt[4]{a^3}$　　⑤ $\sqrt[4]{4a^3}$

해설

$$\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \left(2^4 a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} = 2a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}} = 2a^0 = 2$$

2. $5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 2+\log_5 3^3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 \frac{2\times 3^3}{6}} = 5^{\log_5 3^2} = 9$

3. $5^a = 2,\ 5^b = 3$이라 할 때, $\log_6 72$를 a와 b의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+b}{a-b}$　② $\dfrac{2a+b}{b-a}$　③ $\dfrac{2a-b}{a+b}$

④ $\dfrac{2a+b}{a+b}$　⑤ $\dfrac{3a+2b}{a+b}$

해설

$a = \log_5 2,\ \ b = \log_5 3$

$$\log_6 72 = \frac{3\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a+2b}{a+b}$$

4. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$일 때, $a + 2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

5. $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\sqrt[3]{3}=a,\ \sqrt[3]{2}=b$ 라고 하면

$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a^3+b^3$

$=3+2=5$

6. 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a+b=13$이다.

7. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 일 때, $a+a^{-1}$ 의 값을 구하여라.(단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=4^2$

$a+a^{-1}+2=16$

$\therefore a+a^{-1}=14$

8. $2^x = 3$일 때, $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{3}{13}$ ③ $\dfrac{3}{10}$ ④ $\dfrac{3}{8}$ ⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} = \frac{2^x - \dfrac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \dfrac{1}{(2^x)^2}}$$

$$= \frac{3 - \dfrac{1}{3}}{3^2 - \dfrac{1}{3^2}} = \frac{\dfrac{8}{3}}{\dfrac{80}{9}} = \frac{3}{10}$$

9. $11^x = 25$, $275^y = 125$ 일 때, $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(11^x)^{\frac{1}{x}} = (25)^{\frac{1}{x}}$ 에서 $5^{\frac{2}{x}} = 11$

$(275^y)^{\frac{1}{y}} = (5^3)^{\frac{1}{y}}$ 에서 $5^{\frac{3}{y}} = 275$ 이므로

$5^{\frac{2}{x}} \div 5^{\frac{3}{y}} = 11 \div 275 = \dfrac{1}{25}$

$5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}} = 5^{-2}$, $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = -2$

10. 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$을 만족할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$이므로

$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$

따라서, $a = 4c,\ b = 2c$

$a,\ b,\ c$의 최대공약수가 3이므로

$c = 3,\ a = 12,\ b = 6$

$\therefore a+b+c = 12+6+3 = 21$

11. $\log_{10}(1+1)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

(준식)$=\log_{10}2+\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{10}\frac{100}{99}$

$=\log_{10}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$

$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2$

12. $2x = \log_7 2$일 때, $\dfrac{7^{3x} + 7^{-3x}}{7^x + 7^{-x}}$의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{3}{2}$　③ $\dfrac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\dfrac{7}{3}$

해설

$2x = \log_7 2$에서 $7^{2x} = 2$

따라서 $\dfrac{7^{3x} + 7^{-3x}}{7^x + 7^{-x}} = \dfrac{(7^{3x} + 7^{-3x}) \times 7^{3x}}{(7^x + 7^{-x}) \times 7^{3x}}$

$= \dfrac{7^{6x} + 1}{7^{4x} + 7^{2x}} = \dfrac{(7^{2x})^3 + 1}{(7^{2x})^2 + 7^{2x}}$

$= \dfrac{2^3 + 1}{2^2 + 2} = \dfrac{3}{2}$

13. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$

$(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$

$a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$

$a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$

$(a+10b)(a-12b) = 0$

$\therefore\ a = -10b$ 또는 $a = 12b$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0,\ 2b > 0,\ 62b-a > 0$ 이므로

$a > 0,\ b > 0$

따라서 $a = 12b$ 이고 $\dfrac{a}{b} = 12$ 이다.

14. 서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여 $\log_a b = \sin x$, $\log_a c = \cos x$일 때, $b^{\sin x} \cdot c^{\cos x}$의 값은?

① a ② b ③ c ④ ab ⑤ ac

해설

$\log_a b = \sin x$에서 $b = a^{\sin x}$

$\log_a c = \cos x$에서 $c = a^{\cos x}$

$$\begin{aligned} \therefore b^{\sin x} \cdot c^{\cos x} &= (a^{\sin x})^{\sin x} \cdot (a^{\cos x})^{\cos x} \\ &= a^{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= a^1 = a \end{aligned}$$

15. $a^2b^5 = 1$일 때, $\log_{ab}(a^5b^2)$의 값은? (단, $ab \neq 1$, $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$)

① $\frac{5}{3}$　② $\frac{11}{3}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{11}{5}$　⑤ 1

해설

$\log a^2b^5 = 0$에서 $2\log a + 5\log b = 0$

$\therefore \ \log b = -\frac{2}{5}\log a$

$$\log_{ab}(a^5b^2) = \frac{5\log a + 2\log b}{\log a + \log b} = \frac{3\log a - \frac{4}{5}\log a}{\log a - \frac{2}{5}\log a} = \frac{\frac{11}{5}\log a}{\frac{3}{5}\log a} = \frac{11}{3}$$

16. $\triangle$ABC의 세 변 a, b, c에 대하여 $\log_{(a+b)} c + \log_{(a-b)} c = 2\log_{(a+b)} c \cdot \log_{(a-b)} c$와 같은 관계가 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가? (단, $a > b, c \neq 1$)

① 정삼각형

② $b = c$인 이등변삼각형

③ $a = c$인 이등변 삼각형

④ a를 빗변으로 하는 직각삼각형

⑤ b를 빗변으로 하는 직각삼각형

해설

밑의 변환 공식을 이용하면

$$\frac{1}{\log_c(a+b)} + \frac{1}{\log_c(a-b)}$$

$$= \frac{2}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)}$$

양변에 $\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)$를 곱하면

$$\log_c(a-b) + \log_c(a+b) = 2\log_c c$$

$$\log_c(a-b)(a+b) = \log_c c^2$$

로그의 정의에 의해

$$(a-b)(a+b) = c^2, a^2 - b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle$ABC는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

17. 이차방정식 $3x^2-8x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $P=\log_{\sqrt{10}}(3\alpha^2-7\alpha+3)+\log_{\sqrt{10}}(3\beta^2-7\beta+3)$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}(1-\log 3)$ ③ $\frac{1}{2}(1+\log 3)$
④ 1 ⑤ $\log 3\sqrt{2}$

해설

α, β가 방정식 $3x^2-8x+2=0$의 두 근이므로

$3\alpha^2-8\alpha+2=0$, $3\beta^2-8\beta+2=0$

$3\alpha^2-7\alpha+3=\alpha+1$, $3\beta^2-7\beta+3=\beta+1$

$$\begin{aligned}\therefore\ P &= \log_{\sqrt{10}}(\alpha+1)+\log_{\sqrt{10}}(\beta+1)\\ &= \log_{\sqrt{10}}(\alpha+1)(\beta+1)\\ &= \log_{\sqrt{10}}(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\end{aligned}$$

한편, $\alpha+\beta=\frac{8}{3}$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$이므로

$\alpha\beta+\alpha+\beta+1=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}+1=\frac{13}{3}$

$\therefore\ P=\log_{\sqrt{10}}\frac{13}{3}=2\log_{10}\frac{13}{3}$

18. 세 종류의 박테리아 A, B, C는 시간 당 일정한 비율로 증식하며, 각각의 개체 수는 1시간마다 각각 a배, b배, c배로 된다고 한다. A의 수는 2시간마다 2배, B의 수는 3시간마다 3배, C의 수는 4시간마다 5배가 되었다고 할 때, a, b, c 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
④ $b < c < a$ ⑤ $c < a < b$

해설

$a^2 = 2,\ b^3 = 3,\ c^4 = 5$이므로
$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt[3]{3},\ c = \sqrt[4]{5}$
12제곱하여 비교하면
$(\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64,\ (\sqrt[3]{3})^{12} = 3^4 = 81,$
$(\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$
$\therefore\ \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}\quad \therefore\ a < b < c$

19. $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$일 때, $\log_3 10$을 a, b로 나타내면?

① $\dfrac{ab-2a-3b+5}{2b-1}$ ② $\dfrac{ab-a-3b+3}{2b-1}$

③ $\dfrac{2ab+2a-7b+3}{2b-1}$ ④ $\dfrac{3ab+2a-3b+5}{2b-1}$

⑤ $\dfrac{ab-a-3b+3}{2b-3}$

해설

로그의 밑을 모두 3으로 통일시키면

$$\log_6 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (3\times 5)}{\log_3 (2\times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{1+\log_3 5}{\log_3 2 + 1} = a \cdots ㉠$$

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (2\times 3^2)}{\log_3 (2^2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2}{\log_3 2^2 + \log_3 3} = \frac{\log_3 2 + 2}{2\log_3 2 + 1} = b \cdots ㉡$$

㉡에서 $b(2\log_3 2 + 1) = \log_3 2 + 2$

$2b\log_3 2 + b = \log_3 2 + 2$

$(2b-1)\log_3 2 = 2 - b$

$$\therefore\ \log_3 2 = \frac{2-b}{2b-1} \cdots ㉢$$

㉠에서 $a(\log_2 2 + 1) = 1 + \log_3 5$

$\log_3 5 = a\log_3 2 + a - 1$

위의 식에 ㉢을 대입하면

$$\log_3 5 = \frac{a(2-b)}{2b-1} + a - 1$$

$$= \frac{a(2-b)+(a-1)(2b-1)}{2b-1}$$

$$= \frac{2a-ab+2ab-a-2b+1}{2b-1}$$

$$= \frac{ab+a-2b+1}{2b-1}$$

$$\therefore\ \log_3 10 = \log_3 (2\times 5) = \log_3 2 + \log_3 5$$

$$= \frac{2-b}{2b-1} + \frac{ab+a-2b+1}{2b-1}$$

$$= \frac{ab+a-3b+3}{2b-1}$$

20. 다음을 만족하는 두 자연수 m, n의 곱 mn의 값을 구하면?

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{m+n}\right)=\log n$$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)=\log\frac{m+1}{m}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=\log\frac{m+2}{m+1}$$

$$\vdots$$

$$\log\left(1+\frac{1}{m+n}\right)=\log\frac{m+n+1}{m+n}$$

따라서, 주어진 식의 좌변은

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \log\left(\frac{m+1}{m}\times\frac{m+2}{m+1}\times\cdots\times\frac{m+n+1}{m+n}\right)\\ &= \log\frac{m+n+1}{m}\end{aligned}$$

즉, $\log\frac{m+n+1}{m}=\log n$에서

$$\frac{m+n+1}{m}=n$$

$mn-m-n=1, (m-1)(n-1)=2$

m, n이 자연수이므로 $m-1=2$, $n-1=1$ 또는 $m-1=1$, $n-1=2$

$\therefore\ m=3,\ n=2$ 또는 $m=2,\ n=3$

$\therefore\ mn=6$