1. $\sqrt[3]{2^7} \div \sqrt[3]{2} \times \sqrt{2^5}$을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $16\sqrt{2}$

해설

$2^{\frac{7}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{2}}$

$= 2^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} = 16\sqrt{2}$

2. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$을 2^k 꼴로 나타낼 때 k는?

① $\frac{11}{12}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{23}{24}$ ⑤ 1

해설

$$\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$$

$$= \left\{2\times(4\times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{2\times(2^2\times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{2\times(2^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2\times 2^{\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{23}{24}}$$

$$\therefore k = \frac{23}{24}$$

3. $a > 0$일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}}$을 간단히 하면?

① a ② $\sqrt{a}$ ③ $a\sqrt[7]{a^5}$ ④ $\sqrt[8]{a^5}$ ⑤ $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}} = (a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}$$
$$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}$$
$$= a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$$

4. $\log_8 0.25 = x$를 만족하는 x의 값은?

① 1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

$\log_8 0.25 = x$에서 $8^x = 0.25$

$(2^3)^x = \frac{1}{4}$ $\therefore$ $2^{3x} = 2^{-2}$

$\therefore$ $3x = -2$

$\therefore$ $x = -\frac{2}{3}$

5. $\log_4 2 + \log_8 4 - \log_{16} 8$의 값은?

① $-\frac{1}{12}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$\log_{2^2} 2 + \log_{2^3} 2^2 - \log_{2^4} 2^3$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12}$

$= \frac{5}{12}$

6. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은? (단, 공비는 실수)

① 3^9 ② $2 \cdot 3^9$ ③ 3^{10}

④ $2 \cdot 3^{10}$ ⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2 = ar = 6$ ……㉠

$a_5 = ar^4 = 162$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 2,\ r = 3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$

7. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로

a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열

$\therefore a_n = 4 + (n-1) \cdot 3$

$= 4 + 3n - 3$

$= 3n + 1$

$\therefore a_{10} = 31$

8. $(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 12

④ $4\log_2 3$ ⑤ $6\log_2 5$

해설

밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 한 후 계산한다.

$$(\log_2 3 + 2\log_4 7)\log_{\sqrt[4]{21}} 8$$

$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{\log_2 4}\right) \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt[4]{21}}$$

$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{\log_2 2^2}\right) \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 21^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \left(\log_2 3 + 2\frac{\log_2 7}{2\log_2 2}\right) \cdot \frac{3\log_2 2}{\frac{1}{4}\log_2 21}$$

$$= (\log_2 3 + \log_2 7) \cdot \frac{12}{\log_2 21}$$

$$= \log_2 21 \cdot \frac{12}{\log_2 21} = 12$$

9. 삼차방정식 $x^3-3x^2+px+q=0$의 세 실근이 공차가 2인 등차수열을 이룰 때, $p+q$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

세 실근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해
$(a-d)+a+(a+d)=3$
$\therefore a=1$
$(1-d)\times 1\times(1+d)=-q$
$1-d^2=-q$
$(1-d)+(1+d)+(1-d)(1+d)=p$
$2+1-d^2=p$
$2-q=p$
$\therefore p+q=2$

10. $a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$ 이라 할 때, 수열 $\frac{1}{1+a_1}, \frac{3}{3+a_2}, \frac{7}{1+a_3}, \frac{15}{1+a_4}, \cdots$ 의 첫째항부터 제20 항까지의 합은?

① $19 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ ② $20 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ ③ $19 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$
④ $20 + \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$ ⑤ $21 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

해설

$a_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$ 이고, 주어진 수열의 일반항은 $\frac{2^n - 1}{1 + a_k}$ 이다.

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 1}{1 + a_k}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 1}{1 + 2^k - 1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$= n - \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

따라서 $S_n = 19 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

11. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제 20 항은?

① $\frac{9}{64}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{9}{32}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군 제2군 제3군

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots\cdots$

제 n 군까지의 항수는

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

따라서, 제 4 군까지 항수는 15 개이므로 구하는 제 20 항은 제5 군의 제5 항이다.

한편, 제 n 군의 제 m 항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

제5 군의 제5 항은 $\frac{9}{2^5} = \frac{9}{32}$

12. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = -a_n + 2$와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

① $1 + (-1)^n$ ② $2 + (-1)^n$ ③ $3 + (-1)^n$

④ $4 + (-1)^n$ ⑤ $5 + (-1)^n$

해설

$a_{n+1} = -a_n + 2$에서

$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1$, 공비가 -1인 등비수열이므로

$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$

$\therefore\ a_n = 1 + (-1)^n$

13. 첫째항이 31, 공차가 -2 인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220 인 모든 n 의 값의 합은?

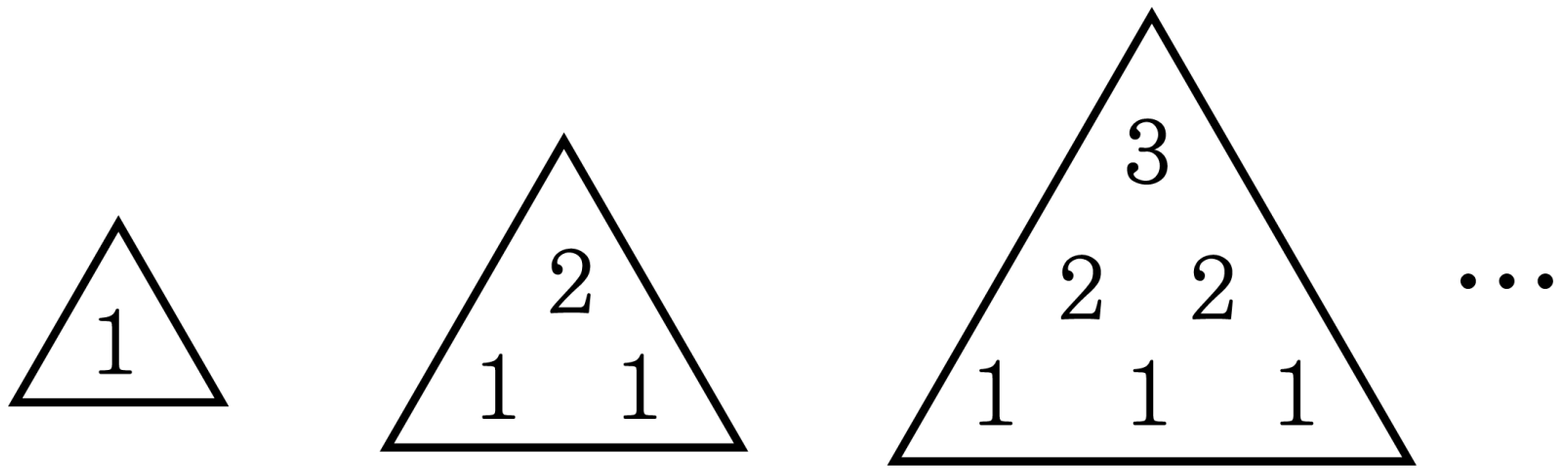
① 10 ② 22 ③ 32 ④ 44 ⑤ 56

해설

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 31 + (n-1) \cdot (-2)\}}{2}$$
$$= n\{31 - (n-1)\}$$
$$= n(32 - n)$$
$$= -n^2 + 32n = 220$$

$\therefore$ n 의 값의 합은 32

14. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 n인 정삼각형의 내부에 다음과 같은 규칙적으로 숫자를 배열한다.



이때, 10번째 정삼각형 안에 적혀 있는 수의 총합은?

① 440 ② 330 ③ 220 ④ 110 ⑤ 90

해설

10번째 정삼각형 안에 적혀 있는 수의 총합은

$1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + \cdots + 10 \cdot 1$

$= \sum_{k=1}^{10} k(11-k) = \sum_{k=1}^{10} (11k - k^2)$

$= 11 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} k^2$

$= 11 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6}$

$= 605 - 385 = 220$

15. $ab > 0,\ a^2 + 2ab - 15b^2 = 0$ 일 때, $\log_5(a^2 + 4ab - 17b^2) - \log_5(2a^2 - 3ab + 11b^2)$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$a^2 + 2ab - 15b^2 = 0$ 에서 $(a - 3b)(a + 5b) = 0$

$\therefore\ a = 3b$ 또는 $a = -5b$

그런데 $ab > 0$ 이므로 $a = 3b$ 이다.

$a = 3b$ 를 주어진 식에 대입하면

$\log_5(a^2 + 4ab - 17b^2) - \log_5(2a^2 - 3ab + 11b^2)$

$= \log_5(9b^2 + 12b^2 - 17b^2) - \log_5(18b^2 - 9b^2 + 11b^2)$

$= \log_5 4b^2 - \log_5 20b^2 = \log_5 \frac{4b^2}{20b^2}$

$= \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$

16. $\log x$와 $\log \dfrac{10}{x}$의 정수 부분의 합과 소수 부분의 합을 순서대로 나열한 것은? (단, $\log x$의 소수 부분은 0이 아니다.)

① 1, −1 ② −1, 1 ③ 0, 1 ④ 1, 1 ⑤ 1, 0

해설

$\log x = n + \alpha,\ (0 < \alpha < 1)$이라하면

$\log \dfrac{10}{x} = 1 - \log x$

$= 1 - n - \alpha$

$= 1 - n - \alpha + 1 - 1$

$= -n + 1 - \alpha$

$0 < \alpha < 1$이므로 $0 < 1 - \alpha$

$\therefore$ $\log \dfrac{10}{x}$의 정수 부분 : $-n$, $\log \dfrac{10}{x}$의 소수 부분 : $1 - \alpha$

정수 부분의 합 : $n - n = 0$

소수 부분의 합 : $\alpha + 1 - \alpha = 1$

17. 전파가 어떤 벽을 투과할 때 전파의 세기가 A에서 B로 바뀌면, 그 벽의 전파감쇄비 F는 $\mathrm{F} = 10\log\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)$ (데시벨)로 정의한다. 전파감쇄비가 -7(데시벨)인 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 몇 배인가? (단, $10^{\frac{3}{10}} = 2$로 계산한다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$-7 = 10\log\frac{B}{A}$$

$$-\frac{7}{10} = \log\frac{B}{A}$$

$$\frac{B}{A} = 10^{-\frac{7}{10}} = 10^{-1}\times 10^{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10}\times 2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

18. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

20. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r 이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \cdots\cdots$ ㉠

$a_7 = ar^6 = 96 \cdots\cdots$ ㉡

㉡ ÷ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \dfrac{3}{2}$

첫째항은 $\dfrac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

21. 세 수 $x-4,\ x,\ x+8$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x가 $x-4,\ x,\ x+8$의 등비중항이므로

$x^2 = (x-4)(x+8),\ x^2 = x^2 + 4x - 32$

$4x = 32 \therefore x = 8$

22. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore\ S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

23. $4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{3}k^3$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$

$=3025-36=2989$

24. 수열 $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26, \cdots$ 의 제 20 항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 362

해설

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 5, & 10, & 17, & 26 \\ & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee \\ & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1)$$

$$= 1 + n^2 - n - n + 1$$

$$a_n = n^2 - 2n + 2$$

$$\therefore a_{20} = 400 - 40 + 2 = 362$$

25. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ + \left| \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ \hline a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \end{array} \right. \\ \quad = -1 + \dfrac{(n-1)\cdot n}{2} \end{array}$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= -1 + 45 = 44$$